

## I. HALMAZOK

### Halmazok, jelölések

1. A következő definíciók közül válasszuk ki azokat, amelyek halmazokat adnak meg.

$A = \{\text{Eger bejelentett lakói 2019. január elsején}\}$   
 $B = \{\text{a Trefort 9. c osztályának tanulói}\}$   
 $C = \{\text{a Trefort 9. c osztályának elég rossz tanulói}\}$   
 $D = \{\text{az 50-nél kisebb páros pozitív prímszámok}\}$   
 $E = \{\text{az Afrikában megrajzolt derékszögű háromszögek}\}$   
 $F = \{\text{100 összes pozitív osztója}\}$   
 $G = \{\text{Budapest elnevezett útjai és utcái}\}$   
 $H = \{\text{a világon a barna hajú lányok}\}$

2. Döntsük el, hogy halmazt adtunk-e meg az alábbiakban!

$A = \{\text{a páros természetes számok}\}$   
 $B = \{\text{a barátságos emberek}\}$   
 $C = \{\text{a kerek számok}\}$   
 $D = \{\text{a kis törtek}\}$   
 $E = \{\text{az 1-nél kisebb pozitív törtek}\}$

3. Írjuk fel, hogy az alábbiak közül melyek az egyenlő halmazok!

$A = \{\text{a pozitív egyjegyű páros számok}\}$   
 $B = \{\text{a nem 0 páros számjegyek}\}$   
 $C = \{\text{a páros számjegyek}\}$   
 $D = \{0, 2, 4, 6, 8\}$   
 $E = \{2, 4, 6, 8\}$   
 $F = \{\text{2 egyjegyű többszörösei}\}$

4. Adjuk meg elemei felsorolásával a következő halmazokat!

$A = \{\text{a 3-nál nagyobb, 10-nél nem nagyobb egész számok}\}$   
 $B = \{\text{a 0 többszörösei}\}$   
 $C = \{\text{2 egyjegyű pozitív többszörösei}\}$   
 $D = \{\text{30 pozitív osztói}\}$   
 $E = \{\text{a 18 és a 30 legkisebb közös többszöröse}\}$

5. Adjuk meg elemei egy közös tulajdonságával a következő halmazokat!

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$   
 $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$   
 $C = \{3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots\}$   
 $D = \{0, 1\}$

6. Ábrázoljuk egyetlen Venn diagrammal ezeket a halmazokat:

$A = \{x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$        $B = \{\text{a dobókockával dobható számok}\}$        $C = \{x \in \mathbb{Z}, x^2 = 4\}$

7. Az alábbi A, B és C halmazokat megadhatjuk felsorolással, körülírással és képlettel is. Pótoljuk a hiányzó megadásokat, és ábrázoljuk a halmazokat a Venn-diagramon!

| halmaz | felsorolás      | körülírás                    | képlet                                                        |
|--------|-----------------|------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| A      | {1; 3; 5; 7; 9} |                              |                                                               |
| B      |                 | egyjegyű, pozitív prímszámok |                                                               |
| C      |                 |                              | $C = \{x \mid 4 \leq x \leq 9 \text{ és } x \in \mathbb{N}\}$ |

### Részhalmazok

8. Legyen  $A = \{\text{egyjegyű páros természetes számok}\}$ ,  $B = \{\text{egyjegyű négyzetszámok}\}$ . Adjuk meg az A halmaz egy lehetséges X, és a B halmaz egy lehetséges Y részalmazát úgy, hogy  $Y \subset X$

$$Y \subseteq X \quad X \subset A \text{ és } Y \subset X \quad X \subset A \text{ és } Y \subseteq X$$

9.  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . a) Hány részalmaz van A-nak? b) Hány valódi részalmaz van A-nak? c) Hány kettő elemű részalmaz van B-nek? d) Hány négy elemű részalmaz van B-nek? e) Hány olyan halmaz van, amelyik A-nak és B-nek is részalmaz?

10. Melyik igaz?  $A \subset B$   $A \subset C$   $A \subset D$   $A \subset E$   $D \subset A$   $E \subset A$ , ha

$A = \{\text{hegyesszögű háromszögek}\}$

$B = \{\text{derékszögű háromszögek}\}$

$C = \{\text{tompaszögű háromszögek}\}$

$D = \{\text{egyenlő szárú háromszögek}\}$

$E = \{\text{szabályos háromszögek}\}$

11. Soroljuk fel a) a dobókockával dobható prímszámok halmazának összes részalmazát, b) a 20-nál kisebb pozitív négyzetszámok halmazának összes részalmazát.

### Intervallumok

12. Ábrázoljuk számegyenesen a következő intervallumokat!

$$]-10; 6]$$

$$]-3; 10[$$

$$]-3; -5]$$

$$]4,5; 3[$$

$$[-2,25; 7,5]$$

$$]-6; 3[$$

13. Adjuk meg és szemléltessük a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát, ha az alaphalmaz A) a természetes számok B) az egész számok C) a nemnegatív valós számok halmaza!

a)  $x < 10$

b)  $-x > 5$

c)  $|x| \geq 3$

d)  $2x < 0$ .

14. Az alábbi egyenlőtlenségek alaphalmaza a valós számhalmaz. A megoldáshalmazokat írjuk olyan sorrendben, hogy mindegyik halmaz után következő halmaz részalmaz legyen az előzőnek!

$$x^2 \geq 5$$

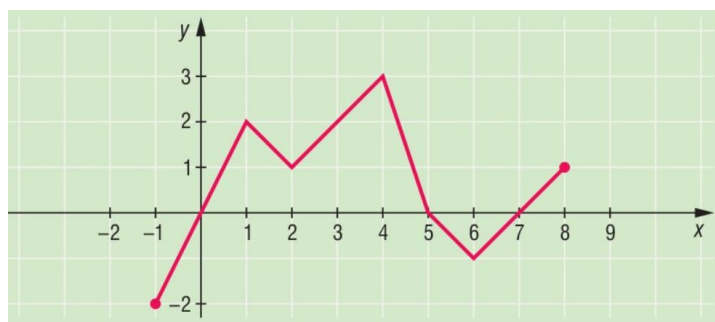
$$x - 10 \geq 15$$

$$-x < -10$$

$$25 < x$$

$$5 < |x| + 2$$

15. Az ábrán látható függvény értelmezési tartománya  $[-1; 8]$ . Határozzuk meg, hogy a) hol vannak a függvénynek zérushelyei; b) mely intervallumokon vesz fel negatív értéket a függvény; c) mely intervallumokon monoton növekvő a függvény.



### Műveletek halmazokkal

16. Az alaphalmaz a  $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   $A = \{2, 7, 8\}$   $B = \{1, 2, 4, 6\}$   $C = \{2, 4, 5, 8\}$   
Végezd el a következő halmazműveleteket. Ábrázold a halmazokat Venn-diagrammal.

$$A \cup B \quad A \cap B \quad B - A \quad B \cap C \quad \overline{A - C}$$

17. Az alaphalmaz a  $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   $A = \{1, 2, 4, 6\}$   $B = \{2, 7, 8\}$   $C = \{3, 4, 5, 8\}$   
Végezd el a következő halmazműveleteket. Ábrázold a halmazokat Venn-diagrammal.

$$A \cup B \quad B \cap C \quad \overline{A - C} \quad (\overline{B \cup C}) - A$$

18. Az alaphalmaz a  $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , további halmazok:  $A = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ ,  $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$   
 $C = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ . Végezd el a következő halmazműveleteket. Ábrázold a halmazokat Venn-diagrammal.

$$\begin{array}{ccccccc} A \cup B & B \cap C & C - A & \overline{A} & \overline{B} & \overline{C} & B \cup \overline{C} \\ \overline{A \cap C} & \overline{B} - A & & & & & \end{array}$$

19. Határozd meg az  $A$  és a  $B$  halmaz unióját és metszetét.

$$A = \{20\text{-nál kisebb négyzetszámok}\}, B = \{3 \text{ egyjegyű többszörösei}\}$$

20. Adj meg két olyan halmazt, melyek metszete  $\{x, 2y, 3z\}$ , és uniója  $\{x, 2x, y, 2y, z, 3z\}$ .

21. Adott két intervallum. Adjuk meg a két intervallum unióját, metszetét, különbségeit.

$$\text{a) } X = [-2, 11] \text{ és } Y = (-\infty, 0] \quad \text{b) } X = \left[\frac{3}{4}, 4\right] \text{ és } Y = \left(\frac{5}{8}, 3\right] \quad \text{c) } X = [3, 9] \text{ és } Y = (5, 7)$$

22. Egy osztály tanulói közül 15 szeret focizni, 12 kosarazni, 6 diák pedig mindkét sportot szereti.  
Hány tanulója van az osztálynak, ha 3-an egyik sportot sem kedvelik?

23. Egy matematikaversenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot az indulók 80%-a, a másodikat pedig az indulók 40%-a oldotta meg. Minden résztvevő megoldott legalább egy feladatot, mindkét feladatot 2 tanuló oldotta meg. Hányan indulhattak a versenyen?

24. Egy sportegyesületnek 550 tagja van, a tagok 20 %-a kajakozik vagy kenuzik. A tagok közül 60-an kajakoznak, és 25-en mindkét sportot úzik. Hányan kenuznak?

25. Egy zeneiskola egyik évfolyamán háromféle hangszeren tanulnak a diákok. Mindenki legalább egy hangszeren tanul. Hegedülni 43-an, zongorázni 46-an, fuvalázní 33-an tanulnak. Három hangszeren senki sem tanul. Azok száma, akik pontosan két hangszeren játszanak 27, közülük hegedülni és zongorázni is tanulnak 9-en. Hányan tanulnak csak fuvalán? Hányan járnak erre az évfolyamra?

**26.** Ede focicsapatot szeretne alapítani. Felhívására sokan megjelentek a plakátokon meghirdetett gyűlésen. Amikor Ede megkérdezte a jelenlévőket, hogy kik játszottak már a különböző posztokon, kiderült, hogy korábban védőt 19-en, középpályást 20-an, csatárt 22-en játszottak. A további kérdésekből kiderült, hogy 10 fő játszott már védőt és középpályást, 9 fő csatárt és védőt, 11-en csatárt és középpályást. 4-en mindhárom poszton fociztak már. Hányan voltak ott az alakuló gyűlésen, ha Ede hozott magával 3 kapusjelöltet is?

**27.** A 26 fős osztályból 15-en tanulnak norvégul, 20-an dánul. Azt is tudjuk, hogy mindenki tanulja a két nyelvet legalább egyikét. Hányan tanulnak csak dánul?

**28.** Egy 10 fős baráti társaságból 5 fő szereti a focit, 4 a kosárlabdát, egyvalaki pedig mind a két sportágat. Hányan nem kedvelik a két labdajáték egyikét sem ebből a baráti társaságból?

**29.** Egy csoportban 13 tanuló készített matematika, 15 tanuló magyar nyelvtan házi feladatot. 8-an készítették el a házi feladatukat mindkét tantárgyból, de volt 3 olyan gyerek is, aki egyik órára sem készült. a) Hány fős a csoport? b) A csoportba járók hány százaléka készítette el csak a matek házi feladatát?

**30.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B halmazokra teljesülnek a következők:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**31.** Határozzuk meg az A és a B halmazokat, ha tudjuk, hogy

$$A \cup B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad A - B = \{8, 9, 10\} \text{ és } A \cap B = \{5\}$$

**32.** Írjuk le a következő halmazok elemeit.  $A \cup B$      $B \cup C$      $A \cup A$      $A \cap D$   
 $E \cap E$      $A - B$      $B - A$      $C - C$ ,

$$\text{ha } A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} \\ D = \{2, 3, 5, 7, 9\}, \quad E = \{0, 3, 6, 9\}$$

**33.** Adjunk meg két olyan halmazt, amelyek különbsége a kétjegyű öttel osztható számok halmaza.

**34.** Legyen  $A = \{\text{egyjegyű páros természetes számok}\}$ ,  $B = \{5\text{-nél nem nagyobb természetes számok}\}$ , s a H alaphalmaznak tekintsük az egyjegyű természetes számok halmazát. Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal! Adjuk meg elemeinek felsorolásával az alábbi halmazokat!

**35.** Egy sport tagozatos osztály létszáma 24 fő. Az osztályban mindenki atletizál vagy kosárlabdázik. 16-an atletizálnak, 14-en kosaraznak. Hány olyan tanuló van az osztályban, aki csak kosarazik?

**36.** Az első koncerten 12-en voltak, a másodikon ugyancsak 12-en vettek részt, a harmadikon pedig 13-an. Három olyan diák volt, aki mindhárom koncerten részt vett. Azok száma, akik csak egy koncerten voltak 14. Mennyi az osztálylétszám?

**37.** Legyen A halmaz a 2-vel, B halmaz a 3-mal, C halmaz a 4-gyel osztható számok halmaza. Készítsünk halmazábrát, és helyezzük el benne a következő számokat:

$$0, 4, 6, 8, 12, 15, 18, 27, 162, 300$$

**38.** Adjunk meg öt halmazt úgy, hogy közülük bármely négynek a metszete ne legyen az üres halmaz, de az öt halmaz metszete az üres halmaz legyen.

39. Egy zeneiskola egyik évfolyamának 56 diákja hegedülni, zongorázni vagy csellózni tanul. Mindenki játszik valamelyik hangszeren. Azok száma, akik pontosan két hangszeren játszanak, négyszer, akik pedig pontosan egy hangszeren játszanak, kilencszer annyi, mint azok száma, akik mindhárom hangszeren játszanak. Hányan vannak azok, akik csak egy hangszeren játszanak?

40. Legyenek az A, B és C halmazok rendre a 3-mal, 6-tal, illetve 5-tel osztható számok halmaza. Mely számok tartoznak az alábbi halmazokba?  $(A - B) \cap C$   $A - B - C$

41. Írjuk fel az  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$  halmazok elemeit, ha  $A = \{a, b, c, g, h, j\}$   $B = \{a, c, f, h, k\}$

42. Adott három halmaz:  $A = \{1, 2, 4, 7, 8, 9, 12\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 11, 12\}$ ,  $C = \{4, 5, 6, 7, 10, 13\}$   
Adjuk meg az alábbi halmazok elemeit!  $(A \cup B) - C$   $(A \cap B) \cup (B \cap C)$   $A \cap (B - C)$

43. Igazoljuk halmazábrák segítségével az alábbi egyenlőségeket.

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

44. Igazoljuk, hogy nem minden esetben igaz az alábbi egyenlőség!  $A - (B - C) = (A - B) - C$

45. Legyen az alaphalmaz a valós számok halmaza. Az A halmaz az  $x \geq 2$ , a B halmaz az  $|x| < 10$ , a C halmaz az  $x \leq 6$  valós számok halmaza. Határozzuk meg az alábbi halmazokat!

$$\overline{A \cup B} \quad \overline{B - A} \quad \overline{\overline{A} \cap \overline{C}}$$

46. Adjuk meg a következő intervallumok metszetét és az eredményt ábrázoljuk a számegyenesen.

$$]-5, 1[ \cap [1, 6[ \quad ]-5, 1[ \cap [1, 6[ \quad ]-5, 1[ \cap ]1, 6[ \quad ]-4, 3[ \cap [0, 4]$$

$$[-5, 3] \cap ]-1, 1[$$

47. Adjuk meg az eredményt:  $] -1, \frac{3}{2}[ \cap ] \frac{1}{4}, \frac{5}{4}[ \quad [-2, 2] \cap ] -8, -1[ \quad [-2, 0] \cup [ -\frac{1}{2}, 7]$   
 $[-4, 0] - [ -3, 5, \frac{1}{2}] \quad ]1, 2[ - [ \frac{3}{2}, 5]$

48. Adjuk meg az A halmaz elemeit, ha az alaphalmaz az  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , a B halmaz elemei  $B = \{3, 5, 7, 8\}$ , továbbá  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A \cap B = \{3, 7\}$  és  $\overline{A \cup B} = \emptyset$ .

49.  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , továbbá  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  két halmaz.

a) Adjuk meg elemeik felsorolásával az  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  halmazokat.

b) Adjunk meg egy C halmazt úgy, hogy  $(B \setminus C) \subseteq A$  legyen.

### Halmazok elemszáma

50. Az A halmaznak 20, a B halmaznak 15 eleme van. Legfeljebb hány eleme lehet a következő halmazoknak?  $A \cup B$   $A \cap B$   $A - B$   $B - A$

51. Az A halmaznak 18, a B halmaznak 11 eleme van. Hány eleme van az  $A \cap B$  halmaznak, ha az  $A \cup B$  halmaz 22 elemet tartalmaz?

52. Lássuk be, hogy ha A és B véges halmazok, akkor  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

53. Lássuk be, hogy ha A és B véges halmazok, akkor

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

54. Hány elemű az  $A$  és  $B$  halmazok metszete, ha  $A \cup B = 82$ ,  $|A| = 56$  és  $|B| = 93$  ?

### Nehezebb feladatok

55. Adott egy  $n$  elemű halmaz, amely tartalmazza az  $1$ -et. Az  $1$ -et tartalmazó vagy az  $1$ -et nem tartalmazó részhalmazából van-e több?

56. Az iskolai túraszakosztály mind a 42 tagja részt vett az idei három túra valamelyikén. A második kiránduláson eggyel, a harmadikon pedig öttel többen vettek részt, mint az elsőn. Azok száma, akik két túrán vettek részt, háromszor, akik pedig egy túrán vettek részt, tízszer annyi, mint azok száma, akik mindhárom túrán részt vettek. Hányan vettek részt az első, a második, illetve a harmadik kiránduláson?

57. Egy autójavító üzemben 49 szakmunkás dolgozik: autószerelők, lakatosok és autóvillamossági szerelők. Öt olyan szakmunkás van közöttük, aki mindhárom szakmában jártas. Azok az autószerelők, akik nem rendelkeznek a lakatos szakmával is, háromszor annyian vannak, mint akik csak a lakatos szakmával rendelkeznek. Hét olyan szakmunkás van az összes között, akik az autószerelő és a lakatos szakmát is tudják. Azok a villamossági szerelők, akik nem értenek az autószereléshez, 14-gyel kevesebben vannak, mint azok az autószerelők, akik nem értenek a lakatos munkához. Hányan vannak, akik csak a lakatos szakmával rendelkeznek?

58. Adottak az  $U$  alaphalmazon az  $A$  és  $B$  halmazok.

Igazoljuk, hogy  $(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) - (A \cap B)$

59. A Végtelen szálloda egyetlen végtelen hosszú folyosóján — nevéhez híven — végtelen sok egyágyas szoba van. A szobaajtók sorszámozása a recepció mellett kezdődik: 1, 2, 3, ...

Minden szobában van egy hangosbemondó: azon keresztül kérheti meg a recepciós a vendégeket, hogy tegyenek meg valamit. A szállodában telt ház van. Mire szólítsa fel a már bent lakó vendégeket a recepciós, ha

a) egy öttagú család érkezik;

b) egy kongresszus résztvevői érkeznek végtelen sok ( $B_1, B_2, B_3 \dots$  jelű) végtelen hosszú autóbusszal (minden buszon  $S_1, S_2, S_3 \dots$  számú ülés van)?

A recepciós senkit sem küldhet haza, és minden érkezőnek külön szobát kell biztosítania, viszont bármelyik szobába elköltöztetheti a már bent lakókat. Mindezt úgy kell megtennie, hogy egyértelmű legyen, melyik busz melyik ülésének utasa melyik szobát kapja meg. Természetesen az átköltöztetett vendégeknek is meg kell mondani, melyik szobából melyik szobába költözzenek.

60. Jelölje  $T$  a tér összes pontjainak halmazát,  $d(X; Y)$  pedig az  $X$  és  $Y$  alakzatok távolságát. Milyen alakzatok lehetnek a következők? (Az  $r$  mindig pozitív valós számot jelöl.)

$$\{P \in T, d(P; s) = r, \text{ ahol } s \subseteq T \text{ egy adott zárt szakasz}\}$$

$$\{P \in T, d(P; t) \leq r, \text{ ahol } t \subseteq T \text{ egy adott zárt téglalap}\}$$

$$\{P \in T, d(P; u) \leq r, \text{ ahol } u \subseteq T \text{ egy adott zárt téglatest}\}$$

61.

Tekintsük a teret  $U$  alaphalmaznak. Legyen  $H \subseteq U$  egy végtelen zárt hengertest,  $e \subseteq U$  egyenes és  $S \subseteq U$  sík. Mik lehetnek a következő ponthalmazok az alakzatok elhelyezkedésétől függően?

a)  $H \cap e$ ;

b)  $S \setminus e$ ;

c)  $\overline{H} \cap S$ .

62.

Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  halmazokról a következőket tudjuk: mindegyik halmaznak pontosan négy eleme van;  $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 5; 7; 8; 9; 10\}$ ;  $[(A \cup B) \cap C] \setminus (A \cap B \cap C) = \{2; 7\}$ ;  $B \setminus C = \{1; 5\}$ , valamint  $A \cap B = A \cap B \cap C = \{10\}$ .

a) Adjuk meg  $B$  halmaz elemeit.

b) Igaz-e, hogy  $7 \in A$ ?

63. Egy színjátszó csoport már három külföldi fellépéssel büszkélkedhet: jártak Bécsben, Helsinkiben és Prágában. A társulat minden tagja fellépett legalább az egyik helyen. Azon tagok, akik Ausztriában és Finnországban is felléptek, 15-en voltak. 21 -en Prágában és Bécsben is játszottak. Olyan nem volt, aki csak Helsinkiben és Prágában járt, de Bécsben nem.

a) Hányan léptek fel mindhárom fővárosban, ha az összesen 60 fős társulatnak 55%-a csak egy városba jutott el?

A színjátszók vezetőjétől tudjuk azt is, hogy azok közül, akik csak egy külföldi fellépésre tudtak elmenni, Prágában pont feleannyian jártak, mint Bécsben. Kizárólag Helsinkiben 3 fő járt.

b) Hány fővel lépett fel a társulat az egyes városokban?

64. Legyenek  $A$ ,  $B$ ,  $C$  véges halmazok. a) Bizonyítsuk be, hogy metszetük elemszáma nem nagyobb, mint elemszámaik számtani közepe. b) Adjuk meg  $k$  segítségével uniójuk elemszámát, ha tudjuk, hogy közülük egyik sem tartalmazza a másik kettő bármelyikét, metszetük elemszáma  $k$ , és elemszámaik számtani közepe  $k + 1$ . c) Adjunk uniójuk elemszámára alsó és felső becslést, ha tudjuk, hogy minden halmaz  $n$  elemű; metszetük elemszáma  $k$  ( $n > k$ , és vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan).

(A megoldás során használjuk a három halmaz Venn-diagramját.)

65. Mutass példát három olyan halmazra, hogy bármely kettőnek végtelen sok közös eleme van, de a három halmaz közös része üres halmaz.

66. Dávidnak 30 képregénye van. Közülük 14-ben szuperhősök, 9-ben járművek és 20-ban mesefigurák a főszereplők. (Olyan képregénye egy sincs, amelyekben a három közül valamelyik ne szerepelne.) Öt képregényben a mesefigurák járművekkel közlekednek, háromban a járművek szuperhősöket szállítanak. Csak egy olyan képregénye van, amelyben a főszereplő járművek szuperhősöket és mesefigurákat is szállítanak. Hány olyan képregénye van, amelyben a mesefigurák és a szuperhősök gyalog járnak együtt?

67. Egy általános iskola felső tagozatán háromféle szakkör működik: fotószakkör, biológia szakkör és barlangász szakkör. E szakkörök létszámát az ábra mutatja évfolyamokra lebontva. Azok száma, akik pontosan két szakkörre járnak, kétszer, akik pedig pontosan egy szakkörre járnak, háromszor annyi, mint azok száma, akik mindhárom szakkör munkájában résztvesznek. Az iskola felső tagozata 216 diákjának kb. hány százaléka nem jár semmilyen szakkörre?

|         | Fotó | Biológia | Barlangász |
|---------|------|----------|------------|
| 5. évf. | 12   | 16       | 8          |
| 6. évf. | 14   | 18       | 12         |
| 7. évf. | 8    | 6        | 17         |
| 8. évf. | 7    | 5        | 7          |

## II. ALGEBRA

### Algebrai kifejezések

1. Hozd a legegyszerűbb alakra:  $4a \cdot a$      $xy \cdot x^2y$      $a^2 \cdot 2a$      $3b^4 \cdot (-b^2)$      $-\frac{1}{5}c \cdot 15c^3$

$$4x^5 \cdot \left(-\frac{5}{12}x^3\right) \quad (-6d^4) \cdot (-3d^2) \quad \frac{2}{3}e^k \cdot \frac{3}{2}e^2 \quad 3a^2b \cdot (-3b) \quad -2x \cdot (-2y) \\ 4a^2b \cdot 3ab^3 \quad -10xyz \cdot 0,2x^2z \quad 2 \cdot 7ab^2 \cdot \frac{1}{2}a^2b \quad \frac{3}{5}xy \cdot \frac{10}{9}yz \cdot \frac{6}{4}xz$$

2. Végezzük el a kijelölt szorzásokat:

$$5a \cdot (a - 2) \quad (b + 3) \cdot (-4b) \quad (x + y) \cdot \frac{x}{3} \quad 3b \cdot (4 - b^2) \quad (4c^3 - c) \cdot \frac{1}{2}c^2 \\ (d^2 - 6d + 2) \cdot \left(-\frac{5}{12}d\right) \quad (x - x^2 + x^3) \cdot x^2 \\ \frac{5}{3}a \cdot (3ab + 6a^2b - 9b^2a) \quad (3a + 2b - c) \cdot (-ab^2)$$

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$(4a + 3b) \cdot 6 - 5(a + 2b) + (b - 2a) \cdot 8 \quad 4b^2 - b(6c - 5b) + 2c(3b + 7c) \\ 2x(x + 3) - (x^2 - 2x + 3)(-2) \quad 3p - 2p(5p - (4 + 2p) + 3)$$

4. Végezzük el a kijelölt műveleteket, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$(a + b)(c + d) \quad (x - 2)(x + 5) \quad (a + 2)(a - 3) \quad (x - y)(2 + x) \quad (b - a)(a + b) \\ (2y + 7x)(2x - y) \quad (4a^2 - b)(3a^2 + 2b) \quad (a^2 + 3a)(2a - a^3) \\ (x - 1)(1 + x + x^2) \quad (a^2 - 2a + 4)(a + 2) \quad (a^2 + ab + b^2)(a + b) \\ (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \\ (7ab + a - b)(b - a + 7ab) \quad (x + 1)(x - 2)(x + 3)$$

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$(x + 1)(x - 4) + (x + 2)(x - 3) \quad (6y - 5)(4y + 3) \\ - (8y - 3)(3y + 1) \quad (x^2 + 7y)(x - y^2) + (xy - 1)(xy + 4)$$

6. Végezzük el a műveleteket:

$$(3a - 1)^2 - (2a + 3)(2a - 3) + (a + 2)^2 \quad (4x + 3)(4x - 3) - (3x + 2)^2 + (x - 7)^2$$

## Nevezetes azonosságok

7. A nevezetes azonosságok felhasználásával hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$(a+5)^2 \quad (a-4)^2 \quad (3a+b)^2 \quad (3a-4b)^2 \quad \left(\frac{x}{4}-2\right)^2 \quad \left(2x-\frac{1}{2}y\right)^2$$
$$\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\right)^2 \quad \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^2 \quad \left(\frac{3}{7}xy-\frac{7}{3}x\right)^2 \quad (x^2+y^2)^2 \quad \left(\frac{1}{2}x-4y^2\right)^2$$

8. Az egyik nevezetes azonosság felhasználásával hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$(a-b)(a+b) \quad (x-5)(x+5) \quad (4+9m)(4-9m) \quad \left(\frac{x}{3}-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{5}\right)$$
$$\frac{(2c-7d)(7d+2c)}{(k^2-m^3)(k^2+m^3)} \quad (7+a+b)(7-a-b)$$

9. Írjuk át egy kéttagú kifejezés négyzeteként, azaz írjuk át teljes négyzetté:

$$x^2-2xy-y^2 \quad a^2+2a+1 \quad 4b^2+4b+1 \quad 9y^6-12y^3+4 \quad x^2+10x+25$$
$$4a^2-36ab-81b^2 \quad 25a^2+80ab+64b^2 \quad \frac{x^4}{4}-x^2y+y^2 \quad y^4-2y^2x^3+x^6$$

10. Írjuk át úgy, hogy egy kéttagú kifejezés négyzete is szerepeljen a kifejezésben:

$$x^2+6x+10 \quad a^2-8a+13 \quad b^2+\frac{4b}{5}-\frac{1}{25} \quad -y^4+2y^2+6 \quad -k^2-10k^3-28$$
$$4a^2+28a+45 \quad 9c^2-12c+11 \quad 2x^2+20x+49 \quad -3y^2+18y-18$$

11. Végezzük el a kijelölt műveleteket, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$(x-3)^2+(2x-1)^2 \quad 3(a-2b)^2-(3a+b)^2 \quad (6a-5)^2-(4a-3)(9a-2)$$
$$(a-1)(a+1)(a^2-1) \quad (b-3)^2(b+3)^2$$

12. Végezzük el a szorzásokat, majd rendezzük a tagokat valamelyik betű fokszáma szerintit csökkenő sorrendbe:

$$(a+b)(a+b)(a+b) \quad (x+y)(x+y)^2 \quad (x+2)^3 \quad (b-c)^2(b-c) \quad (3-x)^3$$

13. Bontsuk fel a zárójelt az előző feladatban kapott eredmények felhasználásával.

$$(a+b)^3 \quad (a-b)^3 \quad (x-1)^3 \quad (1-x)^3 \quad (y+2)^3 \quad (2m-1)^3 \quad (2a+b)^3$$

## Szorzáttá alakítás

Alakítsuk szorzattá:

14.  $x^3+x^2-x \quad a^2+5a \quad -y^2-3yz \quad 9b^2c+6bc^2 \quad x^3-x^4 \quad ab^2+a^2b^3$

$$6x^3-10x^2+2x \quad 4b^4+8b^3+28b^2$$

15.  $a(c + d) + b(c + d)$        $2x(y - 5) + 3y(y - 5)$

$5k(m + 3) - 2(3 + m)$        $3a(b + 5) + b + 5$

$b(c - 4) - c + 4$        $6c(d - 3) + 4d - 12$        $x + y + ax + ay$        $x + y - ax - ay$

$ax - bx + 2a - 2b$        $ab + ac + bd + cd$        $2ax - 2bx - 3a + 3b$

16.  $ab + 3b - 2a - 6$        $2ax + bx + 2a + b$

$2ax + 5y + 10x + ay$        $ab - 8x + 4a - 2bx$

17.  $a^2 - b^2$        $x^2 - 9$        $16 - c^2$        $d^2 - \frac{1}{4}$        $4a^2 - \frac{9}{25}b^2$        $16c^4 - d^8$

18.  $36a^2 - b^2$        $x^2 - 2xy + y^2$        $(x + 2)^2 - 9y^2$        $9a^4 + 6a^2 + 1$        $49y^4 - 64$

19.  $a^2b^2 - 9$        $16 - x^2y^2$        $4a^4 - 9$        $4 - a^2b^2$        $a^2 - x^2y^2$

20. Alakítsuk a lehető legtöbb tényezős szorzattá:

$x^3y - xy^3$        $10a^2 - 90$        $m^5 - m^3$        $2b^2 + 4b + 2$        $3c^2 + 6cd + 3d^2$        $a^4 - 16x^4$

$3a^2 - 3b^2$        $5p^2 - 5$        $x^3 - x^2$        $3xy^2 + 6xy + 3x$        $a^3b - ab^3$

## Algebrai törtkifejezések

### Értelmezési tartomány

21. Az ismeretlen mely értékeinél nem értelmezhető a tört?

$\frac{5}{x-y}$        $\frac{3}{2x}$        $\frac{a}{a-3}$        $\frac{x-3}{x}$        $\frac{x-3}{x+3}$        $\frac{a+3}{a^2}$        $\frac{b}{b^2-1}$        $\frac{b-2}{b^2-4}$        $\frac{a+2}{a(a+2)}$

22. Az x mely értékeire lesz a tört értéke nulla?

$\frac{x-3}{x}$        $\frac{2}{x+1}$        $\frac{2x+1}{x-2}$        $\frac{x^2-4}{x^2}$        $\frac{x(x+2)}{x+3}$        $\frac{5}{x-1}$        $\frac{x-3}{x+3}$        $\frac{x+3}{x^2}$

### Törtek egyszerűsítése

23. Egyszerűsítsük a törteket:  $\frac{6a}{9b}$        $\frac{-2a}{4b}$        $\frac{5ax^2}{10a}$        $\frac{12ab^3}{4ab}$        $\frac{8ax}{12ay}$        $\frac{12a^3}{4a^2b}$        $\frac{-x}{3x^2}$

24. Egyszerűsítsük a törteket:  $\frac{27a^5b^2}{12a^2b^3}$        $\frac{3x^2(x-2)}{6x^3(x-2)}$        $\frac{3-a}{a-3}$        $\frac{32a(a-5)}{24a^2(5-a)}$

25. Alakítsuk a számlálót vagy a nevezőt vagy mindkettőt szorzattá, majd egyszerűsítsük a törtet:

$\frac{x^2 - y^2}{x - y}$        $\frac{5a}{5a + 15b}$        $\frac{2a - 4}{3(a - 2)}$        $\frac{5x(y + 3)}{6y + 18}$        $\frac{x^2 - 36}{x - 6}$        $\frac{15 + 3y}{y + 5}$        $\frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$

$$\frac{x+2}{x^2-4} \quad \frac{3a^2-3}{7a+7} \quad \frac{x^2+x}{x^2-1} \quad \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} \quad \frac{a^2-2ab+b^2}{a-b} \quad \frac{8x^2y^2+2xy}{4x^2y} \quad \frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$$

6. Alakítsuk a számlálót vagy a nevezőt vagy mindkettőt szorzattá, majd egyszerűsítsük a törtet:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{a^2+a}{a^2-1} & \frac{3x^2-3}{6x-6} & \frac{2a^2+6a}{a^2+6a+9} & \frac{b^2+4b+4}{b^2+2b} & \frac{5c^2-45}{c^2-6c+9} & \frac{a^4-1}{a^4-2a^2+1} \\ & & \frac{a-b}{-(a-b)} & \frac{a-b}{-a+b} & \frac{a-b}{b-a} & \frac{c-7}{7-c} \\ & & \frac{3a+3b}{a^2-b^2} & \frac{x^2-y^2}{5x-5y} & \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} & \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} \end{array}$$

*Törtek összevonása*

27. Végezzük el az összeadásokat és kivonásokat, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$\frac{a}{4} - \frac{a}{6} \quad \frac{x}{5} - \frac{y}{2} \quad \frac{3x-2}{5} + \frac{2x+3}{3} \quad \frac{2a+5}{4} - \frac{2a-3}{5} \quad \frac{x}{ab} + \frac{x}{ac} \quad \frac{a}{x-1} + \frac{b}{1-x}$$

28. Végezzük el az összeadásokat és kivonásokat, hozzuk a legegyszerűbb alakra.

$$\frac{2}{a^2} - \frac{1}{a} \quad \frac{m^2+3}{m^2} + \frac{2-m}{m} \quad \frac{x+y}{x^2y} + \frac{x-y}{xy^2} \quad \frac{8}{b-c} + \frac{7}{c-b}$$

29. Állapítsuk meg, mit érdemes közös nevezőnek választani. Majd hozzuk a törteket közös nevezőre, majd végezzük el az összevonásokat:

$$\frac{2a-3b}{a^2b} - \frac{4a-5b}{ab^2} \quad \frac{5x^2-2x-1}{x^2y} - \frac{3x-2}{xy} \quad 2a - \frac{a-b}{5} \quad \frac{3}{a-1} + \frac{2}{a}$$

30. Végezzük el az összeadásokat és kivonásokat, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$\frac{x}{2x+1} - \frac{x}{2x-1} \quad \frac{a+1}{a} - \frac{a+2}{a+1} \quad \frac{k-3}{k-1} - \frac{2k}{k+1}$$

31. Végezzük el az összeadásokat és kivonásokat, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$\frac{5}{2x} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{5} \quad \frac{3}{4y^2} + \frac{1}{2y} - \frac{5}{y} \quad \frac{6a+7}{a(a+1)} - \frac{5}{a+1} \quad \frac{a+1}{8a+3} + \frac{5a}{24a+9}$$

*Törtek szorzása, osztása*

32. Végezzük el a szorzásokat, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$\frac{a}{10} \cdot \frac{5}{a} \quad \frac{3a^2}{x^2} \cdot \frac{a^3}{16x^3} \quad \frac{2a}{3b} \cdot \frac{6a^2}{7b^2} \cdot \frac{b^3}{a^2}$$

33. Amely számlálót vagy nevezőt lehet, azt alakítsuk szorzattá, majd végezzük el a műveleteket:

$$\frac{a^2 + ab}{b^2} \cdot \frac{2b}{a^2} \quad \frac{x^2 - ax}{a^2} \cdot \frac{a}{x^2} \quad \frac{a-b}{4b^3} : \frac{a^2 - ab}{8b^4}$$

$$\frac{3x+12}{xy} \cdot \frac{xy-2y}{x+4} \quad \frac{x^2+xy}{x} \cdot \frac{y}{xy+y^2}$$

34. Végezzük el a műveleteket, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$4a : \frac{16a}{b} \quad \frac{2ax}{yz} : \frac{3bx}{ay} \quad \frac{a^2 + ab}{a} : \frac{ab + b^2}{b} \quad \frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} : \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 9}$$

*Emeletes törtek*

35. Hozzuk a legegyszerűbb alakra:  $\frac{\frac{2}{3}}{11}$ ,  $\frac{\frac{2}{3}}{11}$ ,  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ,  $\frac{\frac{a+1}{2}}{\frac{c-2}{4}}$ ,  $\frac{\frac{x-3}{6}}{\frac{x-3}{9}}$ ,  $\frac{\frac{4-d}{2}}{\frac{8}{d-4}}$

$$\frac{x}{\frac{x}{2} - 1} \quad \frac{2 + \frac{7}{c}}{\frac{2}{c}} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} \quad \frac{x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}} \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} \quad \frac{\frac{2}{a} - 5a}{\frac{3}{a} + 5a}$$

*Vegyes feladatok algebrai törtekkel*

36. Végezzük el a műveleteket, hozzuk a legegyszerűbb alakra:

$$\frac{a^2 - b^2}{3a + 3b} \cdot \frac{6a^2 - 6b^2}{a^2 - 2ab + b^2} \quad 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{1-x} \quad \left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2}\right)$$

$$\left(a + \frac{1}{a} - 1\right) \left(a + \frac{1^2}{a} + 1\right) \quad \frac{a+5}{a^2-16} \cdot \left(1 - \frac{9}{a+5}\right) \quad \left(\frac{4b}{2b+5} - 2\right) : \frac{5}{4b^2-25}$$

37. Végezzük el a következő műveleteket:

$$\frac{a+3}{a-1} + \frac{5-a}{a} \quad \frac{2x+y}{x+y} + \frac{3x-y}{x-y} \quad \frac{3a}{a-b} - \frac{4b}{a+b} \quad \frac{2a+1}{a+1} + \frac{a-2}{a-1} - \frac{3a^2-a}{a^2-1}$$

$$\frac{x+3y}{x+1} - \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-1} \quad \frac{b+5}{b^2-16} \cdot \left(1 - \frac{9}{b+5}\right) \quad \left(3 + \frac{1}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{1-2a}{3a-2} + 1\right)$$

$$\left(2 + \frac{x-1}{3x-1}\right) \cdot \left(\frac{1-x}{7x-3} + 1\right) \quad \frac{a^2-9}{a+2} : \left(1 - \frac{5}{a+2}\right) \quad \frac{x^2-4}{x+3} : \frac{x-2}{x+3} - 2$$

$$\left(3 + \frac{1-6b}{2b+3}\right) : \frac{5}{2b+3} \quad \left(\frac{4c}{2c-5} - 2\right) : \frac{5}{4c^2-25} \quad \frac{x^2-25}{x^2-2x} : \frac{x^2+5x}{x^4-4x^2}$$

$$\left(2 + \frac{3-4x}{2x+1}\right) : \frac{x}{2x+1} \qquad \frac{9a-3b+5}{9a^2-9b^2} \cdot \frac{15a+15b}{3} \qquad \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1} \cdot \frac{2x+2}{x-2}$$

$$\frac{2ab-a^2}{4b^2-a^2} \cdot \frac{6b+3a}{a} \qquad \frac{5x^2-20y^2}{3x+6y} : \frac{5x-10y}{9x} \qquad \left(\frac{2}{a} - \frac{3}{b}\right) : \frac{4b^2-9a^2}{ab}$$

## Hatványozás

38. Számítsuk ki fejben:

$$2^4 \quad 2^5 \quad 2^6 \quad 2^7 \quad 2^8 \quad 3^3 \quad 3^4 \quad 3^5 \quad 5^3 \quad 5^4 \quad 5^5 \quad (-2)^3 \quad (-2)^4 \quad (-1)^2 \quad (-1)^3 \quad (-1)^4$$

39. Számítsuk ki fejben. Az eredmény egy hatvány legyen.

$$2^3 \cdot 2^{60} \quad 3^{21} \cdot 3^{20} \quad 10^{40} \cdot 10^{50} \quad 5^{76} : 5^{70} \quad 10^{13} : 10^9 \quad 2^{2020} : 2^{20} \quad (3^4)^5 \quad (5^2)^{50}$$

40. Végezzük el a műveleteket:

$$\frac{2^5}{2^{-4}} \quad 3^{-5} \cdot 3^{-7} \quad \frac{10^{-3}}{10^{-8}} \quad \frac{10^4 \cdot 10^{-9}}{10^8} \quad \frac{2^4 \cdot 2^{-5}}{2^6 \cdot 2^{10}} \quad 3^{70} : 3^{-71}$$

$$5^9 \cdot \frac{5^4}{5^{-1}} \quad (5^{-4})^{-8} \quad (11^2)^{-3} \cdot 11^8$$

41. Írjuk fel prímszámok szorzataként:

$$10^3 \quad 10^3 \cdot 15 \quad 6^3 \cdot 14^2 \quad 8^4 \cdot 9^5 \quad 30^3 \cdot 6^5 \cdot 10 \quad 28^4 \cdot 15^5 \cdot 6^2 \cdot 35^2 \quad 25^3 \cdot 81^2$$

42. Írjuk fel a következő számok prímtényezős felbontását, majd a kapott szorzatot emeljük négyzetre a hatványozás egyik azonosságával felhasználásával. 875, 2625, 1560, 840, 1800, 7395

43. Keressük meg az alkalmas közös alapot, majd a hatványozás azonosságai alapján végezzük el a műveleteket:  $2^7 \cdot 16^2$      $9^{-6} \cdot 81^4$      $32^{-5} : 8^7$      $\frac{4^9}{8^{3 \cdot 4^{14}}}$      $\frac{27^7}{81^{-7}}$      $(16^3)^{-4} \cdot 128^{15}$

43. Végezzük el a következő műveleteket számológép nélkül:

$$2^{10} \cdot 5^{10} \quad \frac{3^{40}}{3^{38}} \quad \frac{12^{10}}{4^{12}} \quad \frac{20^4}{4^4} \quad (2^2)^4 \quad (5^2)^2 \quad 2^{18} \cdot 2^{15} \quad (-1)^8 \quad (-1)^{2019}$$

44. Végezzük el a következő műveleteket:

$$x^4 \cdot (-x)^{10} \quad \frac{a^{10}}{a^2} \quad \frac{x^{12}}{x^4} \quad \frac{-x^7}{x} \quad (a^2)^{10} \quad (x^2 y^3)^4 \quad \frac{x^{10}}{x^{12}} \quad \frac{(-1)^7}{(-1)^{10}}$$

45. Melyik szám nagyobb?  $63^7$  vagy  $16^{12}$

$$10^{30} \text{ vagy } 30^{10}$$

46. Számítsuk ki a következő hatványok értékét:

$$3^{-2} \quad 5^{-1} \quad 2^{-4} \quad 10^{-3} \quad 7^{-2} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \quad 0,1^{-3} \quad \frac{1}{3^{-2}} \quad \frac{2}{5^{-3}} \quad \frac{3}{0,1^{-1}} \quad \frac{5}{2^{-2}} \quad \frac{0,02}{5^{-3}}$$

47. Állapítsuk meg, hogy a két szám közül melyik a nagyobb:

$$\frac{7}{8} \text{ vagy } \left(\frac{7}{8}\right)^{-1} \quad 5^{-3} \text{ vagy } 7^{-3} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \text{ vagy } \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \text{ vagy } \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

48. Írjuk fel a következő számokat negatív kitevő alkalmazásával:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{64} \quad 0,1 \quad 0,01 \quad 0,000001 \quad \frac{3}{8} \quad \frac{2}{25} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{81} \quad \frac{1}{625} \quad \frac{6}{100}$$

49. Milyen számjegyre végződnek?  $2^{60}$   $3^{45}$   $5^{200}$   $7^{100}$   $237^{237}$

50. Végezzük el az osztásokat számológép nélkül:

$$8^0 : 7^0 \quad 3^{-4} : 3^{-3} : 3^5 \quad 6^{-3} \cdot 6^3 \quad x^{-7} : x^{-9} : x^{-10} \quad \frac{6a^4}{2a^3} \quad \frac{b^{-2}}{2b^3} \quad (7^{-4})^2 : 7^{-3}$$

51. Végezzük el a műveleteket:  $x^4 \cdot x^{10}$   $a^{10} : a^2$   $\frac{x^{12}}{x^4}$   $\frac{-x^7}{x}$   $\frac{(-x)^7}{x}$   $\frac{-x^{20}}{-x^{19}}$   $\frac{(-x)^{20}}{(-x)^{19}}$

$$(a^{10})^2 \quad (x^2 y^3)^4 \quad \frac{x^{12}}{x^{10}} \quad \frac{(-1)^7}{(-1)^{10}} \quad 2^3 \cdot 2^7 : 2^{13} \quad 5^4 : \frac{(5^5)^7}{5^9}$$

$$a^5 \cdot a^{90} : a^{-6} \quad \frac{(-2)^5}{2^6 \cdot (-2)^3}$$

52. Számítsuk ki számológép nélkül:

$$3^0 + 3^{-0} \quad 4^{-2} + 2^{-3} \quad (5^{2025})^0 \quad 1 + 10^0 + 10^{-1} + 10^{-2} \quad 3^3 \cdot 3^{-3}$$

53. Számítsuk ki a hatványozás azonosságainak felhasználásával:

$$(7^{-4})^2 \cdot (7^{-3})^{-3} \quad 10^5 \cdot \frac{100^2}{1000} \quad 10^5 \cdot \frac{100^{-3}}{1000^2} \quad 27^{-3} \cdot 9^{-4}$$

$$\frac{27^{-3} \cdot 9^{-5}}{81^{-4}} \quad 100^4 : 10^5 \cdot 1000^{-9}$$

54. Alakítsuk szorzattá úgy, hogy az egyik tényező egy hatvány legyen:

$$8^2 + 8^2 \quad 2^3 + 5 \cdot 2^3 \quad 3^4 - 3^3 \quad 5^4 - 5^2 + 5^3 \quad 10^9 + 10 \cdot 10^8 \quad 3 \cdot 7^5 + 4 \cdot 7^5$$

55. Számítsuk ki számológép nélkül. Elég, ha a végeredmény egy hatványmennyiség.

$$3^3 + 2 \cdot 3^3 \quad 13 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6 \quad (2^8 + 4^4) \cdot 5^9 \quad 3^5 \cdot 45 - 6^5 \cdot 2^5$$

56. Írjuk fel olyan alakban a következő kifejezéseket, hogy ne legyen bennük tört:

$$\frac{a}{b^2} \quad \frac{2x}{a^{-3}} \quad \frac{2xy^2}{x^{-2}y^{-1}} \quad \frac{a^2b^{-3}}{cb^{-1}} \quad \frac{5a^{-2}b^{-1}}{2a^2b^{-2}}$$

57. Írjuk fel olyan alakban a következő kifejezéseket, hogy ne legyen bennük negatív kitevő:

$$3x^{-5} \quad a^0b^{-2} \quad 2y^{-3} \quad 5a^{-3}b^3 \quad 2x^{-2}y^3 \quad \frac{a^{-1}}{b^{-1}} \quad \frac{a^{-3}}{b^{-2}} \quad \frac{3a^{-2}}{b^{-1}} \quad \left(\frac{a}{x^2}\right)^{-1} \quad \left(\frac{1}{x-1}\right)^{-1}$$

58. Írjuk fel olyan alakban a következő kifejezéseket, hogy ne legyen bennük negatív kitevő:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1} \quad (a+b^{-1})(a^{-1}-b) \quad (a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$$

59. Végezzük el a műveleteket a hatványozás azonosságainak felhasználásával:

$$x^2 \cdot x^{-3} \quad a^{-2} \cdot a^{-3} \quad a^{-2} \cdot a^3 \quad a^{-2} \cdot a^3 \cdot a^{-4} \quad x^3 \cdot x^{-2} \cdot x^{-4} \quad y^2 \cdot y^{-12} \cdot y^{-3}$$

60. Végezzük el a műveleteket a hatványozás azonosságainak felhasználásával:

$$(a^{-1} + b^{-1})^2 \quad (a^{-2} + b^{-1})^{-2} \quad (x^{-1} + y^{-1})^{-2} : (x + y)^{-2}$$

$$(a^{-1}b^2 - a^2b^{-1}) : (a^{-3} - b^{-3}) \quad (ab^{-1} - a^{-1}b)(a^{-1} - b^{-1})^{-1}$$

61. Hozzuk a legegyszerűbb alakra:  $(a^7)^3 \cdot (a^4)^5$        $\frac{(x^3)^5}{(x^4)^3}$        $\frac{(b^2)^6 \cdot b^5}{(b^3)^4 \cdot (b^2)^2}$        $\frac{(x^4)^4 \cdot (x^5)^5}{(x^3)^3 \cdot (x^3)^2}$

62. Hányadikra kell emelni  $4^4$ -t, hogy  $8^8$ -t kapjunk?

63. Hozzuk a legegyszerűbb alakra:  $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

64. Számítsuk ki számológéppel:  $8^3$ ,  $5^2 \cdot 8^4$ ,  $3^2 \cdot 9^4$ ,  $4^4 \cdot 3^4 - (5^3)^2$ ,  $(10^3 - 5^3)^2$ ,  $\frac{10^8 - 2^5}{4^2}$

65. Végezzük el a számítást hatványozás azonosságainak felhasználásával:

$$(3^3)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5, \quad (2 \cdot 3)^5 \cdot (2^3 \cdot 3^2)^4, \quad (5 \cdot a^2)^3 \cdot (a^3)^4, \quad (5^2)^{-2} \cdot 125, \quad (a^{-4})^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-4}$$

66.

A 2-nek hányadik hatványai a következő számok?

a)  $1024^{1024}$ ;      b)  $32^{-32}$ ;      c)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{500}$ ;      d)  $\left(\frac{1}{128}\right)^{-128}$ .

### Számok normálalakja

67. Írjuk fel normálalakban: 234    5400    0,123    0,0009     $32 \cdot 10^4$      $1200 \cdot 10^3$      $0,88 \cdot 10^2$

$720 \cdot 10^7$      $0,314 \cdot 10^{-3}$      $999 \cdot 10^{-8}$     55888999    0,000000002     $0,00004 \cdot 10^2$

$$123123 \cdot 10^{123}$$

68. Számológép nélkül számoljuk ki, az eredményt normálalakban adjuk meg.

$$7 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^3 \quad 1,9 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \quad \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5} \quad \frac{2,1 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-4}} \quad (4 \cdot 10^{-3})^2 \quad (3 \cdot 10^{-2})^3$$

$$5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3$$

$$1,2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} \quad \frac{3,1 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} - 0,0015}{0,2} \quad \frac{2 \cdot 10^{-2} + 1,2 \cdot 10^{-3} - 10^{-2}}{0,007}$$

69. Végezzük el a műveleteket.

$$\begin{array}{l} 1,6 \cdot 10^{-5} \cdot 2,5 \cdot 10^7 \quad 1,25 \cdot 10^4 \cdot 3,2 \cdot 10^3 \\ 2,5 \cdot 10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \quad \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^3} \end{array}$$

$$\frac{1,45 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^{-3}}{5,4 \cdot 10^{-5}} \quad \frac{7,8 \cdot 10^{-2} \cdot 1,05 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,4 \cdot 10^{-5}}$$

$$3 \cdot 10^{-2} + 4,1 \cdot 10^{-3} \quad 7,83 \cdot 10^5 + 3,91 \cdot 10^7$$

70. Írjuk le helyiértékes számírással a következő számokat:

$$2,3 \cdot 10^4 \quad 0,712 \cdot 10^{-3} \quad 9876,2 \cdot 10^{-4} \quad 6,88 \cdot 10^6$$

$$120240360 \cdot 10^{-9} \quad 0,010203 \cdot 10^{10}$$

71. Egy ember 24 óra alatt átlagosan 20 000 liter levegőt lélegez be. a) Hány liter levegőt lélegez be egy ember hetven év alatt? b) Milyen magas lenne ez a levegőoszlop, ha az alapterülete 1 négyzetméter volna? Normálalakban adjuk meg az eredményt.

72. A fény terjedési sebessége 300 000 km/s. a) Mennyi idő alatt teszi meg a fény a Nap és a Föld közötti 149,6 millió km távolságot? b) Hány méterre van a Földtől a Hold, ha onnan 1,28 sec alatt ér a fény a Földre? Normálalakban adjuk meg az eredményt.

73. A hozzánk legközelebbi csillag (a Nap után) a Proxima Centauri, amely tőlünk 4,24 fényévre van. a) Mennyi idő alatt ér a fénye a Földre? b) Hány méterre van tőlünk ez a csillag? Normálalakban adjuk meg az eredményt.

74. Mennyi az 1 g szénben levő összes elektron tömege? A szén moláris tömege 12 g/mol, 1 mol szén  $6 \cdot 10^{23}$  db atomot tartalmaz, és az elektron tömege  $9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, egy szénatomban hat elektron van. Normálalakban adjuk meg az eredményt.

75. Mennyi idő alatt tesz meg a fény 1 mm-t, ha a sebessége  $3 \cdot 10^8$  m/s? Normálalakban adjuk meg az eredményt.

76. Mennyi utat tesz meg a fény 45 perc alatt, ha a sebessége  $3 \cdot 10^8$  m/s? Normálalakban adjuk meg az eredményt.

77. A tapasztalat szerint egy  $\text{cm}^2$  füves területen körülbelül 12 fűszál nő. a) Hány fűszál lehet egy 100 m hosszú és 73 m széles futballpályán? b) Európa területe 10 700 000  $\text{km}^2$ . Hány futballpálya férne el rajta? Az eredményeket normálalakban adjuk meg.

78. Ha három hangya tömege 1 gramm, akkor hány tonna tömegű egy 20 millió hangyát tartalmazó hangyabolynak? Normálalakban adjuk meg az eredményt.

79. Hány méterre van az Altair nevű fényes csillag, ha a fény 16,5 év alatt ér ide onnan? (A fénysebesség  $3 \cdot 10^8$  m/s) Normálalakban adjuk meg az eredményt.

80. Tekintsük a percenkénti pulzusszámot átlagosan 69,45-nak. a) Számítsuk ki az egy nap alatti szívdobbanások számát. b) Mennyi idő alatt haladja meg a szívdobbanások száma az egymilliárdot?

81. Írjuk fel normálalakban a világ népességét. 1900-ban 1 608 000 000 fő, 1930-ban 2 milliárd 70 millió fő, 1950-ban 2,5 milliárd 17 millió, 1970-ban 3,635 milliárd, 1980-ban 4 415 millió, 1990-ben 5 milliárd 292 millió, 2019-ben 7 milliárd 724 millió 52 ezer.

82. Hány négyzetméter területű az a téglalap alakú földterület, amelynek két oldalhossza 1200 méter, illetve 2,5 km?

83. Végezzük el a következő műveleteket.  $1,9 \cdot 10^2 + 3,6 \cdot 10^2 - 2,5 \cdot 10^2$

$$10,01 \cdot 10^3 - 2,81 \cdot 10^3 + 1,19 \cdot 10^3 \quad 8,7 \cdot 10^{-4} + 9,8 \cdot 10^{-4} - 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$19,63 \cdot 10^{-4} + 1,3 \cdot 10^{-5} + 2,6 \cdot 10^{-3} \quad (1,25 \cdot 10^2) \cdot (8 \cdot 10^{-4})$$

$$(2,02 \cdot 10^{-1}) \cdot (3,3 \cdot 10^6)$$

$$(4,8 \cdot 10^{-3}) : (2,4 \cdot 10^3) \quad (8,88 \cdot 10^{-2}) : (2,22 \cdot 10^{-2})$$

### Exponenciális egyenletek

84. Oldjuk meg a következő exponenciális egyenleteket

$$3^x = 27 \quad 3^{3x} = 27 \quad 10^x = 0,001 \quad 4^x = \frac{1}{4} \quad 4^x = 32 \quad 2^{4x-6} = 64$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} = 1 \quad 7^x = 0 \quad 2^{-4x} = \frac{1}{4} \quad 8^{2x} = 128 \quad 3^{4x-6} = 729$$

$$5^x = 3^x \quad \left(\frac{1}{64}\right)^x = 2^{5x-1} \quad 4^x = 8^{2x-1}$$

### Vegyes feladatok

85. A sakk feltalálója a gazdag királytól annyi búzaszemet kért jutalmul, amennyi a sakktábla utolsó mezőjére jutna, ha az első mezőre 1 búzaszemet tenne és minden továbbira kétszer annyit, mint az előzőre. Számoljunk azzal a kerekítéssel, hogy  $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$ . a) Írjuk fel normálalakban, hogy így számolva a sakktábla 64-dik mezőjére hány búzaszem jutna? b) Egy búzaszem tömegét vegyük 0,03 grammnak. Normálalakban írjuk fel, hogy hány tonna lenne a jutalmul kapott búza.

86. Gondoljunk egy pozitív egész számra. Adjuk hozzá a kiválasztott számnál eggyel kisebb, illetve eggyel nagyobb számot. Az eredményt emeljük négyzetre, majd vonjuk le belőle a kiválasztott számnál kettővel kisebb és kettővel nagyobb számok szorzatát. A kapott szám negyedrésztét. Ha megmondanánk az így kapott eredményt hogyan lehetne ebből kitalálni, hogy milyen számra gondoltunk?

87. Végezzük el a hatványozást, azaz bontsuk fel a zárójelet:

$$(a+b)^3, (a-b)^3, (a+2b)^3, (a-2b)^3$$

88. Alakítsuk szorzattá az  $x^3 + y^3$  kifejezést úgy, hogy az egyik tényező  $x + y$  legyen, azaz, írjuk fel így:  $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (\dots \dots \dots)$

89. Alakítsuk szorzattá az  $x^3 - y^3$  kifejezést úgy, hogy az egyik tényező  $x - y$  legyen, azaz, írjuk fel így:  $x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (\dots \dots \dots)$

91. Egy téglalap kerülete 74 cm. A téglalap minden oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. A négy négyzet területének összege  $1642 \text{ cm}^2$ . Mekkora a téglalap területe?

### III. GEOMETRIA

#### Háromszögek

##### I.

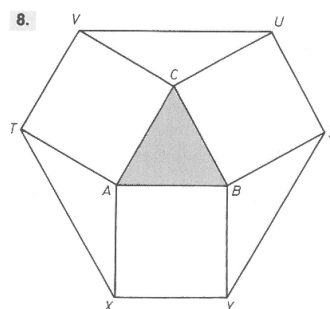
1. Hány olyan háromszög van, amelynek két oldala 6 és 10 cm, és tudjuk, hogy a harmadik oldal is centiméterekben mérve egész szám?

2. Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge  $102^\circ$ . Mekkora lehetnek a háromszög szögei?

3. Mekkora az AB és az AC szakaszok felezőpontjainak távolsága, ha a a) B pont az A és C pontok között van; b) C pont az A és B pontok között van?

4. Egy derékszögű háromszög egyik szöge  $37^\circ$ . Mekkora részekre osztja az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget?

5. Az ABC szabályos háromszög oldalai fölé kifelé négyzeteket rajzolunk. Számítsuk ki az XYZUVT hatszög belső szögeit.



6. Egy háromszög egyik belső szöge  $80^\circ$ . Számítsuk ki a másik két belső szög szögfelező egyeneseinek hajlásszögét.

7. Egy háromszög két oldala 34 és 28 cm. Milyen határok között változhat a háromszög harmadik oldala és milyen határok között változhat a kerülete?

8. Szerkesszünk szabályos háromszöget, ha a beírt körének sugara 6 cm.

9. Egy háromszög két szöge  $42^\circ$  és  $64^\circ$ . Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcshoz tartozó magasság és szögfelező?

##### II.

10. Az ABCD négyzet síkjában lévő E pont az A és B csúcsokkal szabályos háromszöget alkot. Mekkora lehet a BEC szög?

11. Két egymástól 10 méterre álló egyenes fa magassága 7, illetve 12 méter. Milyen távol van egymástól a két fa csúcsa?

12. Mekkora a derékszögű háromszög hegyesszögei, ha az ábrán látható módon három egyenlő szárú háromszögre tudjuk felbontani?

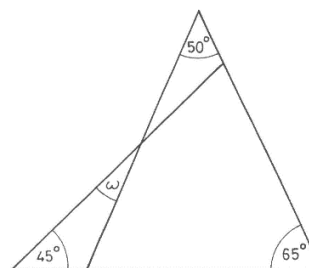


13. Adjuk meg annak az egyenlő szárú háromszögnek a területét, amelynek szára b hosszúságú, szárszöge  $120^\circ$ .

14. a) Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben  $\alpha=22^\circ$  és  $\beta=66^\circ$ , akkor a háromszög kettővágható két egyenlő szárú háromszögre. b) Oldjuk meg a feladatot általánosan  $\beta=3\alpha$  esetén. ( $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ )

15. Egy ABC háromszög C csúcsából húzott belső szögfelezőjének a szemközti oldallal bezárt szöge  $\gamma$ . Igazoljuk, hogy  $\gamma = 90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}$ .

16. Mekkora az ábrán megjelölt  $\omega$  szög?



17. Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldalain úgy tűztük ki az X, Y, Z pontokat, hogy  $AX = BY = CZ$ . Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög egyenlő oldalú.

### III.

18. Helyezzünk el 7 pontot és 6 egyenest a síkon úgy, hogy mindegyik egyenesen 3 pont legyen.

19. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes véges sok zárt szakasza közül bármely kettőnek van közös pontja, akkor létezik olyan pont, amelyik az összes szakasznak pontja.

20. Hány olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalak mérőszáma pozitív egész szám, és az egyik befogó 15 egység?

21. Az ABC derékszögű háromszögben C csúcsnál derékszög van,  $AC = 18$  cm és  $BC = 15$  cm. A háromszögben O egy olyan belső pont, amelyre az OAB, OAC és OBC háromszögek egyenlő területűek. a) Adjuk meg az O pont távolságát a befogóktól. b) Mekkora az OC szakasz hossza? c) Bizonyítsuk be, hogy  $OA^2 + OB^2 = 5 \cdot OC^2$ .

22. Egy háromszögben  $\alpha - \beta = 24^\circ$ . Számítsuk ki a C csúcsból húzott magasság és belső szögfelező hajlásszögét.

### Négyszögek

#### I.

23. Mekkoraak lehetnek annak a deltoidnak a szögei, amelynek két szöge  $40^\circ$  és  $102^\circ$ ?

24. Hány fokosak annak a rombusznak a szögei, amelynek magassága fele olyan hosszú, mint az oldala?

25. Az ABCD négyzet BC oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja E, CD oldalának felezőpontja F. Mekkora az AEF háromszög kerülete, területe, ha a négyzet oldala 12 cm?

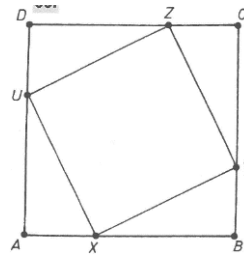
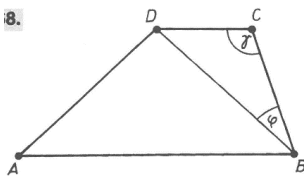
26. Egy paralelogramma köré kör írható. A paralelogramma szomszédos oldalainak hosszúsága 12, illetve 5 cm. Mekkora sugarú kör írható a paralelogramma köré?

27. Egy szép deltoid két szomszédos szöge  $110^\circ$  és  $53^\circ$ . Mekkoraak lehetnek a hiányzó szögek?

## II.

28. Adott egy négyzet átlójának és oldalának különbsége. Adjunk eljárást a négyzet szerkesztésére.
29. Egy konvex négyszög átlói merőlegesen egymásra. Mekkora a négyszög területe, ha átlóinak hossza  $e$  és  $f$ ?
30. Egy deltoid 10 cm-es átlója a 24 cm-es átlót 3 : 5 arányban osztja. Mekkora a deltoid oldalai?
31. Igazoljuk, hogy minden trapézban a száron fekvő két szög szögfelezői merőlegesen egymásra.
32. A bal oldali ábrán látható trapézban  $AD = BD$ ,  $AB$  párhuzamos  $CD$ -vel,  $\gamma = 110^\circ$ ,  $\phi = 30^\circ$ . Számítsuk ki a trapéz szögeit.

32.



33. Egy négyzet oldalait három egyenlő részre osztottuk és a harmadolópontokat a jobb oldali ábrán látható módon összeköttöttük. Igazoljuk, hogy az XYZU négyszög négyzet.
34. Egy négyzet átlóján levő P pont az átló két végpontjától 1, illetve 7 cm távolságra van. Milyen messze van a P pont a többi csúctól?

## III.

35. Egy konvex négyszög két-két szemben levő oldalának felezőpontjait összekötő szakaszok a négyszöget négy négyszögre bontják. Ezek közül háromnak a területe 15, 20 és 25 cm<sup>2</sup>. Mekkora lehet az eredeti konvex négyszög területe?
36. Konvex négyszög alakú kert mely belső pontjából vezet egyenes ösvény a kert négy sarkához, ha tudjuk, hogy az ösvények hosszának az összege a lehető legkisebb?
37. Egy 18 cm oldalú négyzet oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzolunk. Milyen négyszöget alkotnak a háromszögeknek a négyzeten kívül lévő csúcsai? Mekkora ennek a négyszögnek a területe és a kerülete?
- 38.a) A négyszöget átlói négy háromszögre bontják. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögek köré írt köröknek a középpontjai paralelogrammát alkotnak.
- 38.b) Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével.

## Sokszögek

### I.

39. Egy tízoldalú sokszög szögei egyenlők. Számítsuk ki, hány fokos a sokszög egyik szöge.
41. Töltsük ki a bal oldali táblázatot, amely konvex sokszögek adatait tartalmazza.

| A sokszög oldalainak száma | A sokszög egyik csúcsából kiinduló átlóinak a száma | A sokszög belső szögeinek összege |
|----------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 10                         |                                                     |                                   |
|                            | 15                                                  |                                   |
|                            |                                                     | 3960°                             |
| $n$                        |                                                     |                                   |
|                            | $a$                                                 |                                   |
|                            |                                                     | $\varphi$                         |

| A szabályos sokszög oldalainak száma | A szabályos sokszög egy belső szöge | A szabályos sokszög egy külső szöge |
|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 20                                   |                                     |                                     |
|                                      | 144°                                |                                     |
|                                      |                                     | 40°                                 |
| $n$                                  |                                     |                                     |
|                                      | $\alpha$                            |                                     |
|                                      |                                     | $\beta$                             |

42. Töltsük ki a jobb oldali táblázatot, amely konvex sokszögek adatait tartalmazza.

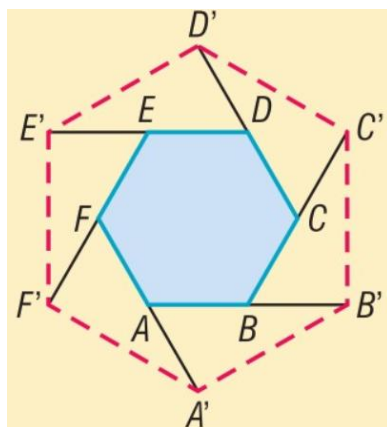
43. Hány fokok szöget zárnak be egy szabályos ötszög egy csúcsából kiinduló átlói?

## II.

44. Szerkesszünk szabályos hatszöget, ha adott a legrövidebb átlójának hossza.

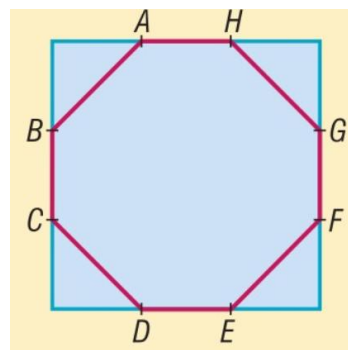
45. Az ABCDEF szabályos hatszög oldala 12 cm. Az oldalakat meghosszabbítjuk ciklikusan az ábrán látható módon 12 cm-rel. Az így kapott A'B'C'D'E'F' hatszögnek

- mekkorák a szögei?
- mekkora a kerülete?
- mekkora a területe?



46. Egy 2,4 m oldalú négyzet oldalait három egyenlő részre osztottuk, majd az osztópontokat az ábrán látható módon összeköttöttük. Így keletkezett az ABCDEFGH nyolcszög.

- Hány fokok a nyolcszög szögei?
- Szabályos-e ez a nyolcszög?
- Mekkora a nyolcszög kerülete?
- Mekkora a nyolcszög területe?



47. Egy szabályos hatszög oldalának hossza 2 cm. a) Milyen hosszúak az egy csúcsból kiinduló átlók? b) Mekkora a hajlásszöge az egy csúcsból kiinduló átlóknak? c) Mekkora a hatszög területe?

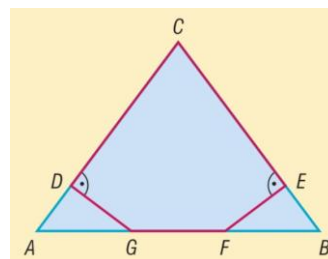
48. Egy búbajos szabályos sokszögnek 54 átlója van. Mekkora egy belső szöge?

49. Egy büszke szabályos sokszög egy belső szöge 140°. Hány átló indul ki egy csúcsból?

50. Hány átlója van annak a konvex sokszögnek, melynek belső szögeinek összege 1980°?

### III.

**51.** Egy ABC egyenlő szárú háromszög alapja 24 cm, magassága 16 cm. Az AB alap F és G harmadolópontjaiból bocsássunk merőlegeseket a szárakra, ezek talppontjai rendre E és D. Mekkora a CEFGD ötszög kerülete és területe?



**52.** Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos kilencszög leghosszabb átlója az oldalának és a legrövidebb átlójának az összege.

### A Thalész tétel

#### I.

**53.** Mekkora sugarú kör írható egy derékszögű háromszög köré, ha befogóinak hossza a) 8 cm és 24 cm; b) a és b?

**54.** Egy 8 cm sugarú kör középpontjától 10 cm-re levő pontból szerkesszünk érintőt a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza?

**55.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a beírt körének sugara.

**56.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget tudván, hogy az alapja 6 cm, a szárához tartozó magassága 4 cm.

**57.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha az átfogója 9 cm, az átfogóhoz tartozó magassága 5 cm.

#### II.

**58.** Az adott átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb?

**59.** Egy trapéz szárai 10 és 15 cm hosszúak. Mekkora a szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza, ha a szárak mint átmérők fölé írt Thalész-körök érintik egymást?

**60.** Vegyünk fel egy nagy kört és benne két pontot, A-t és B-t. Szerkesszünk téglalapot a következő feltételekkel: a) mind a négy csúcsa a körön legyen, b) az A és a B pont a téglalap két szomszédos oldalára illeszkedjen.

(Segítség: szerkesszük meg először azt a csúcsot, amelyben az A-n és B-n átmenő oldalak összefutnak.)

**61.** Húzzuk meg egy beszédes ABC háromszög három magasságvonalt, a magasságpontot jelöljük M-mel. Most rajzoljuk meg az MC szakasz Thalész körét. Hol metszi ez a kör a háromszög AC és BC oldalát?

**62.** Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja egyenlő távolságra van az A illetve a B-csúcsból húzott magasságok talppontjaitól.

63. Szerkesszünk háromszöget, ha az egyik oldala 8 cm, a másik két oldalhoz tartozó magassága 5,5 cm és 5 cm.
64. Vegyünk fel egy A és egy B pontot, továbbá adjunk meg egy  $d$  hosszúságot. Szerkesszünk egy olyan A középpontú kört, amelyhez a B-ből húzott érintőszakasz hossza éppen az előre felvett  $d$  hosszúsággal egyezik meg.
65. Egy derékszögű háromszög átfogója 7 cm, az egyik befogóhoz tartozó súlyvonala 5,5 cm. Szerkesszük meg a derékszögű háromszöget.

### III.

66. Az ABC háromszögben a B csúcsnál levő belső szög szögfelezője az AC oldalt D pontban metszi. Ugyanezen csúcsnál lévő külső szög szögfelezője az AC oldal egyenesét E pontban metszi. DB szakasz hossza 8 cm, BE szakasz hossza 6 cm. Mekkora a DBE háromszög a) köré írt körének sugara? b) beírt körének sugara?
67. Rajzoljuk meg egy ABCD paralelogramma AB és BC oldala mint átmérő köré írt köröket. Ezen körök B-től különböző metszéspontját jelöljük M-mel. Bizonyítsuk be, hogy A, M és C egy egyenesen van.
68. Rajzoljunk meg egy kört, és rajta kívül szemeljük ki egy pontot. Most indítsunk a pontból olyan félegyeneseket, amelyek két helyen metszik a kört. Tekintsük a kör húrjait, amelyek ezeken a félegyeneseken vannak. Milyen alakzatot alkotnak ezen húrok felezőpontjai?
69. Milyen alakzatot alkotnak egy kör egy pontjából induló húrok felezőpontjai?

### Vegyes feladatok

#### II.

70. Az ABC háromszög B csúcsán keresztül húzzunk párhuzamost a C csúcsnál lévő belső szög szögfelezőjével. Ez az egyenes AC egyenesét D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy  $DC = BC$ .
71. Adott hegyesszögű háromszögbe szerkesszünk félkört úgy, hogy középpontja a háromszög egy adott oldalán legyen, és érintse a háromszög másik két oldalát.
72. Egy háromszög egyik szöge a)  $48^\circ$ ; b)  $\alpha$ . Mekkora a másik két belső szög szögfelezőinek hajlásszöge?
73. Egy háromszög két szöge  $48^\circ$ , illetve  $74^\circ$ . Mekkora a külső szögfelezők által meghatározott háromszög belső szögei?
74. Mutassuk meg, hogy a szabályos háromszög köré írt kör sugara kétszerese a beírt kör sugarának.
75. Egy egyenlő szárú háromszög magassága 16 cm, szára 20 cm. a) Mekkora a háromszög alapja? b) Mekkora a háromszög szárhoz tartozó magassága? c) Mekkora részekre osztja a szárat a szárhoz tartozó magasság? d) Mekkora a háromszög beírt körének sugara? e) Mekkora a háromszög köré írt körének sugara?

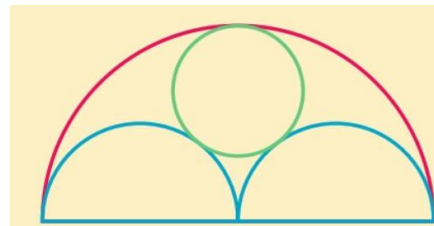
76. Adott egy egyenlő szárú háromszög. Szerkesszünk egy olyan kört, amelyik a háromszög mindkét szárát, valamint a beírt körét is érinti.
77. Egy szabályos sokszögnek 20 átlója van. Mekkora a szabályos sokszög egy belső szöge?
78. Egy szabályos nyolcszög csúcsai közül hányféleképpen választhatunk ki hármat, hogy azok különböző háromszöget alkossanak? Ezek között hány derékszögű háromszög van?
79. Vegyünk fel egy nem egyenlő szárú háromszöget és betűzzük meg az oldalfelező pontjait és az egyik magasságának a talppontját. Lássuk be, hogy ennek a négy pont által meghatározott háromszögnek a) van két párhuzamos oldala, b) van két szemközti oldala.
80. Bizonyítsuk be, hogy bármely derékszögű háromszögben a derékszög szögfelezője felezi az átfogóhoz tartozó magasságvonal és az átfogóhoz tartozó súlyvonal által bezárt szöget.

### III.

81. Az ABC háromszögben  $AB = AC$ . A BC-re B-ben emelt merőleges az AB oldal felezőmerőlegesét M pontban, illetve a C csúcson áthaladó AB-vel párhuzamos egyenes az AC oldal felezőmerőlegesét N pontban metszi. Mekkora az ABC háromszög szögei, ha MAN szög  $120^\circ$ -os?

82. Bizonyítsuk be, hogy az ABCD paralelogrammának az ABC és a BAD szögének szögfelezői akkor és csak akkor metszik egymást a CD oldalon, ha  $AB = 2BC$ .

83. Az ábrán látható nagy félkör sugara 8 cm. A félkör átmérőjére két 4 cm sugarú félkört rajzoltunk. Számítsuk ki annak a körnek a sugarát, amelyik a nagy félkört belülről, a két kisebb félkört kívülről érinti.



84. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, szára 5 cm. a) Legalább mekkora annak a kör lapnak a sugara, amellyel a háromszög lefedhető? b) Milyen távol van a csúcsoktól a beírt kör középpontja?

85. Az ABC háromszög oldalait mekkora szakaszokra osztják a beírt kör érintési pontjai, ha  $AB = c$ ,  $BC = a$  és  $AC = b$ ?

87. Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai hosszának mértékszáma egész szám, akkor a beírt kör sugarának hossza is egész szám.

88. A 18 cm oldalú ABC szabályos háromszög középpontja legyen O. Rajzoljuk be az OA, illetve az OB szakaszok felezőmerőlegesét. a) Mekkora részre osztják ezek az egyenesek a háromszög oldalait? b) Mekkora területű részre osztják ezek az egyenesek a szabályos háromszöget?

89. ABC háromszög A csúcsából kiinduló magasság talppontja E, a B csúcsból kiinduló magasság talppontja G, az AB oldal felezőpontja F. Számítsuk ki az EFG háromszög szögeit, ha a háromszög A csúcsánál levő szöge  $42^\circ$ , a B csúcsánál levő szöge  $67^\circ$ .

90. Két különböző sugarú kör kívülről érinti egymást. Húzzuk meg az egyik közös külső érintőjüket. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott érintési pontok és a két kör közös pontja derékszögű háromszöget határoznak meg.

**91.** Egy folyó két partján a folyótól messze van két falu. Hogyan építsék meg az utat a híddal együtt a két falu között, hogy az út a lehető legrövidebb legyen. A hídnak a partvonalra merőlegesnek kell lenni.

### **Egybevágósági transzformációk**

#### *Tengelyes tükrözés*

#### **I.**

**92.** Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

- a) Van olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.
- b) Van olyan háromszög, amelynek pontosan három szimmetriatengelye van.
- c) Van olyan háromszög, amelynek háromnál több szimmetriatengelye van.
- d) Van olyan síkidom, amelynek végtelen sok szimmetriatengelye van.
- e) Minden rombusznak két szimmetriatengelye van.
- f) Van olyan konkáv négyszög, amely tengelyesen szimmetrikus.
- g) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.
- h) Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor tengelyesen szimmetrikus.
- i) Ha egy négyszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.

**93.** Adjunk szerkesztési eljárást rombusz szerkesztésére, ha adott az egyik átlójának két végpontja, valamint az egyik adott pontnál található szöge.

#### **II.**

**94.** Az ABCD téglalapot tükrözzük a BD átlójára. Milyen tulajdonságú négyszöget határoz meg az eredeti és a tükörképként kapott téglalap közös része?

**95.** Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

- a) Ha egy négyszögnek van két egyenlő szöge, akkor tengelyesen szimmetrikus.
- b) A rombusz tengelyesen szimmetrikus.
- c) Ha egy paralelogramma tengelyesen szimmetrikus, akkor rombusz.
- d) A deltoid szimmetriatengelyére mindig a hosszabb átló illeszkedik.
- e) Ha egy sokszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szabályos.
- f) Ha egy sokszög szabályos, akkor tengelyesen szimmetrikus.
- g) Van olyan tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek szimmetriatengelye a négyszögnek pontosan egy csúcsán megy át.
- h) A szabályos sokszög bármely szimmetriatengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát.
- i) Minden szabályos sokszögnek van olyan átlója, amelynek egyenese szimmetriatengelye a sokszögnek.

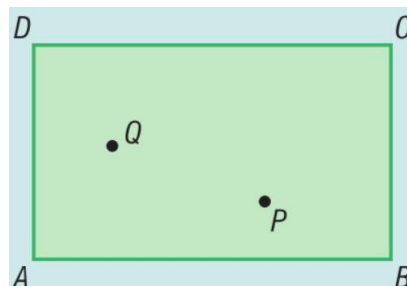
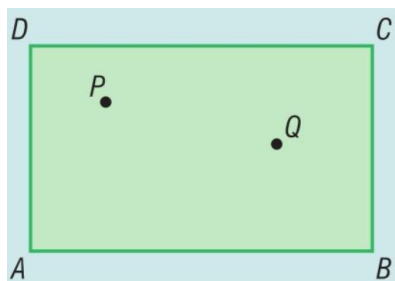
**96.** Vegyünk fel két szép, egymást nem metsző kört, és egy  $t$  egyenest. Szerkesszünk ügyesen egy olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelyre a következők teljesülnek: a)  $t$  a szimmetriatengelye, b) egyik csúcsa az egyik körön van, c) a másik csúcsa a másik körön van.

(Segítség: könnyítsünk a feladaton úgy, hogy elhagyunk egy feltételt, pl. az elsőt.)

**97.** Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei  $30^\circ$ -osak. A szárak felezőmerőlegesei az alapot három részre osztják. Számítsuk ki az egyes részek hosszát, ha a háromszög alapja 18 cm.

### III.

**98.** Az ABCD téglalap alakú (jobb oldali) biliárdasztalon két golyó található: P és Q. Adjunk szerkesztési eljárást arra vonatkozóan, hogy milyen irányba kell ellökni a P golyót, ha azt akarjuk, hogy (más oldal érintése nélkül) az AB oldalról visszapattanva éppen eltalálja a Q golyót?



**99.** Az ABCD téglalap alakú (bal oldali) biliárdasztalon két golyó található: P és Q. Adjunk szerkesztési eljárást arra, hogy milyen irányba kell ellökni a P golyót, ha azt akarjuk, hogy az előbb az a) AB, majd az AD oldalt érintve; b) AB, majd a BC, CD, végül a DA oldalt érintve eltalálja a Q golyót?

**100.** Az ABCD téglalap A csúcsának a BD átló egyenesére vonatkozó tükörképét jelölje F.

a) Bizonyítsuk be, hogy BF merőleges DF-re. b) Igazoljuk, hogy ha a téglalap nem négyzet, akkor a B, F, C, D pontok valamilyen sorrendben szimmetrikus trapézt alkotnak.

**101.** Az ABC szabályos háromszög AB oldalán tűzzünk ki egy P pontot. Mutassuk meg, hogy ennek a P pontnak az AC és BC oldalaktól mért távolságainak összege a P pont helyzetétől függetlenül állandó.

**102.** Egy szabályos háromszög oldala 6 cm. A háromszög belsejében kijelölünk egy P pontot. Mutassuk meg, hogy a P pontnak a háromszög oldalaitól mért távolságösszege a P pont helyzetétől függetlenül állandó. Számítsuk ki az állandó értékét.

**103.** Az ABC háromszög köré írt kör középpontját tükrözzük a háromszög oldalegyeneseire, így P, Q, R pontokat kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy az ABC, valamint a PQR háromszögek egybevágók.

### *Középpontos tükrözés*

#### I.

**104.** Tükrözzük egy trapéz egyik szárának felezőpontjára. Milyen alakzatot határoz meg a két trapéz egyesítése?

**105.** Tükrözzünk egy konvex négyszöget, majd tükrözzük egyik oldalának felezőpontjára. Számítsuk ki a két négyszög egyesítéséből álló hatszög szögeit, ha a kiindulásul vett négyszög szögei ismertek. Bizonyítsuk be, hogy a szóban forgó hatszög szemközti oldalai párhuzamosak.

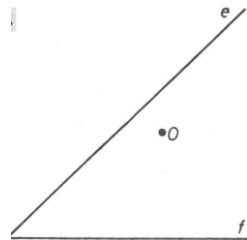
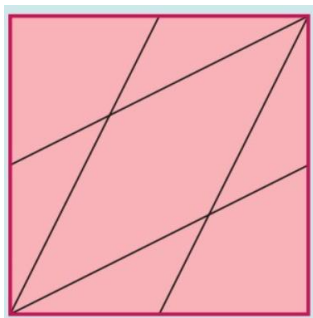
**106.** Vegyünk fel két egyenlő hosszúságú párhuzamos szakaszt. Szerkesszünk olyan pontot, amelyre vonatkozó középpontos tükrözés az egyik szakaszt a másikba viszi át.

## II.

**107.** Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

- a) Nincs középpontosan szimmetrikus háromszög.
- b) A középpontosan szimmetrikus négyszögek mind konvexek.
- c) Van olyan középpontosan szimmetrikus négyszög, amelyik konkáv.
- d) Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor átlói egyenlők.
- e) Ha egy négyszög átlói egyenlők, akkor a négyszög középpontosan szimmetrikus.
- f) A középpontosan szimmetrikus négyszög átlói felezik egymást.
- g) A középpontosan szimmetrikus négyszögben van két egyenlő nagyságú szög.
- h) Van olyan tengelyesen szimmetrikus sokszög, amelyik középpontosan is szimmetrikus.

**108.** Az ábrán egy négyzet két szemközti csúcsát kötöttük össze oldalfelező pontokkal. Ezzel a négyzetet háromszögekre és három négyszögre bontottuk. Milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkeznek a keletkező négyszögek? Milyen négyszögek keletkeznek?



**109.** Szerkesszük meg jól az ábra szerinti e egyenesnek azt a pontját, amelynek az O pontra vonatkozó tükörképe az f egyenesre esik.

**110.** Döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

- i) Ha egy sokszög tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, akkor a szimmetriatengelye tartalmazza a középpontos szimmetria középpontját.
- j) Ha egy négyszög tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, akkor rombusz.
- k) Nincs olyan trapéz, amelyik középpontosan szimmetrikus.
- l) Van olyan deltoid, amelyik középpontosan szimmetrikus.
- m) Van olyan szimmetrikus sokszög, amelynek több középpontja van.
- n) Minden szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus.
- o) A páros oldalszámú szabályos sokszögek középpontosan szimmetrikusak.

**111.** Vegyünk fel egy  $k$  kört, egy azt nem metsző  $e$  egyenest, és a körön szemeljünk ki egy  $P$  pontot az egyeneshez „közel”. Szerkesszünk egy  $AB$  szakaszt ezekkel a feltételekkel:

- a) Az  $A$  pont legyen az  $e$  egyenesen, b) a  $B$  pont legyen a  $k$  körön, c) az  $AB$  szakasz egyik belső pontja legyen a  $P$  pont, d)  $PA = PB$  legyen.

**112.** Vegyünk fel két metsző helyzetű kört. Adjunk szerkesztési eljárást olyan szelő szerkesztésére, amely átmegy a körök egyik metszéspontján, valamint a két körbe eső egy-egy szakasza egyenlő hosszúságú.

### III.

**113.** Egy szög szárai között tűzzünk ki egy P pontot. Szerkesszünk négyzetet, amelynek két átlellenes csúcsa egy-egy szögszáron van, a középpontja pedig a P pont.

**114.** Vegyünk fel két különböző sugarú kört és „közöttük” egy P pontot. Szerkesszük meg az GL szakaszt a következő feltételekkel: a) G pont az egyik körön legyen, b) L pont a másik körön legyen, c) a GL szakasz egyik belső pontja P legyen, d)  $GP = PL$ .

**115.** Vegyünk fel négy kört úgy, hogy ne metsszék egymást, és „közöttük” vegyünk fel egy K pontot. Szerkesszünk paralelogrammát, melynek K a középpontja, négy csúcsa egy-egy körön van.

### *Elforgatás*

#### I.

**116.** Vegyünk fel két pontot a síkon (A és B), valamint egy e egyenest, amely a pontok egyikét sem tartalmazza. Forgassuk el az A pont körül az e egyenest úgy, hogy képe átmenjen a B ponton.

**117.** Vegyük fel az A és B pontokat. Szerkesszünk olyan pontot, amely körül az A pont  $90^\circ$ -os forgatással a B pontba vihető át.

**118.** Rajzoljunk meg két egyenlő, de nem párhuzamos szakaszt. Adjunk nekik nevet. Szerkesszünk olyan pontot, amely körül az egyik szakaszt elforgatva a másikba jutunk.

**119.** Döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

- a) Van olyan háromszög, amelyik forgásszimmetrikus.
- b) Ha egy háromszög forgásszimmetrikus, akkor egyenlő szárú.
- c) Ha egy síkidom forgásszimmetrikus, akkor végtelen sok olyan szög adható meg, amellyel az alakzat önmagába forgatható.
- d) Ha egy síkidom forgásszimmetrikus, akkor van olyan legkisebb pozitív szög, amellyel az alakzat a középpont körül elforgatva önmagába megy át.
- e) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor középpontosan szimmetrikus.
- f) Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor forgásszimmetrikus is.

#### II.

**120.** Adott egy konvex szög, és belsejében egy pont. Adjunk szerkesztési eljárást olyan szabályos háromszög szerkesztésére, amelynek egyik csúcsa az adott pont, egy oldalának két végpontja pedig illeszkedik a szög egy-egy szára.

**121.** Adjunk meg három tetszőleges kört, amelyeknek nincs közös pontjuk és egyik sem tartalmazza a másikat. Az egyiken szemeljünk ki egy E pontot. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egyik csúcsa E, a másik a másik körön, a harmadik a harmadik körön van.

(Segítség: hagyjuk el azt a feltételt, hogy a harmadik csúcs a harmadik körön van.)

**122.** Döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

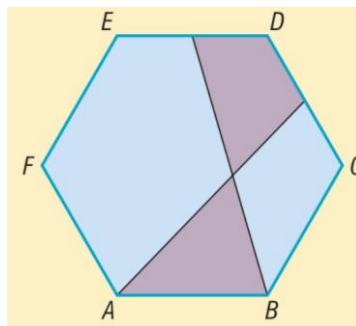
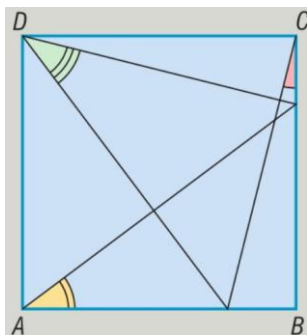
- a) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor szabályos.
- b) Minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus.

- c) Van olyan szabályos sokszög, amely 200-os forgatással önmagába vihető.
- d) Ha egy síkidom 200-os forgatással önmagába vihető, akkor 30000-os forgatással is önmagába vihető.
- e) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor minden szöge egyenlő.
- f) Van olyan konkáv négyszög, amely forgásszimmetrikus.
- g) Van olyan konkáv sokszög, amely forgásszimmetrikus.

**123.** Vegyünk fel két egybevágó egyenlő oldalú háromszöget úgy, hogy az oldalai ne legyenek párhuzamosak. Szerkesszünk egy olyan pontot, amely körül az egyiket valamekkora szöggel elforgatva a másikba jutunk.

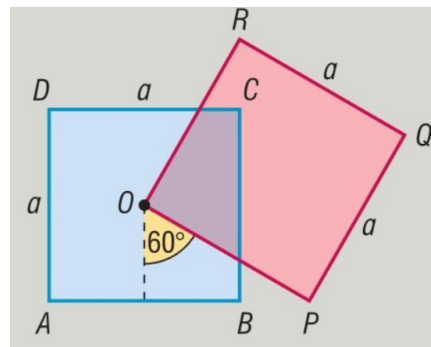
### III.

**124.** Az ábrán egy négyzet csúcsait kötöttük össze a négyzet bizonyos oldalainak negyedelőpontjaival. Bizonyítsuk be, hogy a megjelölt szögek összege  $90^\circ$ .



**125.** Egy szabályos hatszög két csúcsát az ábra szerint összekötöttük bizonyos oldalfelező pontjaival. Bizonyítsuk be, hogy a besötétített síkidomok területe megegyezik.

**126.** Az ABCD négyzet O középpontja egy másik négyzet csúcsa, amelynek oldalai párhuzamosak az ABCD négyzet oldalaiival. Ezt a négyzetet az O középpont körül  $60^\circ$ -kal elforgatjuk, így kapjuk az OPQR négyzetet. Mekkora az ABCD és az OPQR négyzetek közös részének területe, ha mindkét négyzet oldala  $a$ ?



**127.** Vegyünk fel három koncentrikus kört, a középsőn tűzzünk ki egy B pontot. Szerkesszünk szabályos BCD háromszöget úgy, hogy C a külső, D a belső körre illeszkedjen.

**128.** Vegyünk fel két koncentrikus kört és közöttük tűzzünk ki egy P pontot. Szerkesszünk egy adott hosszúságú fekete szakaszt, amelynek egyik végpontja az egyik körre, a másik a másik körre esik, és amely fekete szakasz átmegy a P ponton.

## *Eltolás*

### I.

**129.** Vegyünk fel egy háromszöget, valamint annak egy külső pontját. Toljuk el a háromszöget úgy, hogy annak egyik csúcsa az adott pontba kerüljön.

**130.** Ez három feladat.  $A(3, 1)$ ,  $B(-2, 5)$ ,  $C(-4, -2)$ . Toljuk el az ABC háromszöget az

a)  $(1, 3)$  vektorral;

b)  $(-2, 5)$  vektorral

c)  $(-4, -3)$  vektorral.

Írjuk fel a képháromszög csúcsainak koordinátáit.

### II.

**131.** Vegyünk fel két szép párhuzamos egyenest, és tűzzünk ki közöttük egy P pontot. Szerkesszünk egy egyenest, amelyre teljesülnek: a) átmegy a P ponton, b) a két párhuzamos közé eső szakasza 4 cm.

**132.** Vegyünk fel egy hegyesszöget. Szerkesszünk egy 3,5 cm oldalú ABCD négyzetet úgy, hogy a négyzet AB oldala az egyik szögcsúcsra illeszkedjen és a D csúcsa pedig a másik szögcsúcsra illeszkedjen.

**133.**  $A(-1, -3)$ ,  $B(5, 2)$ ,  $C(1, 7)$ . Toljuk el az ABC háromszöget a  $(2; 4)$  vektorral. A kapott háromszöget azután toljuk el a  $(-3, -2)$  vektorral; a képháromszög csúcsait jelölje  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ .

a) Írjuk fel a második eltolás után kapott háromszög csúcsainak koordinátáit.

b) Mutassuk meg, hogy ha az ABC háromszögre a két eltolást fordított sorrendben alkalmazzuk, akkor is az  $A''B''C''$  háromszöget kapjuk eredményül.

c) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög egyetlen eltolással átvihető az  $A''B''C''$  háromszögbe, és adjuk meg az eltolás vektorának koordinátáit.

**134.** Vegyünk fel egy körcíkket. Szerkesszük a körcíkkbe egy olyan 3 cm hosszú szakaszt, amely párhuzamos a körcíkket határoló egyik sugárral, egyik végpontja a körcíkk ívére, a másik végpontja a körcíkket határoló másik sugárra illeszkedik.

**135.** Vegyünk fel egy hegyesszöget és a szögtartományban két pontot (A, B). Szerkesszünk paralelogrammát, amelyre a következők teljesülnek: a) két szomszédos csúcsa A és B, b) két további csúcsa (C és D) pedig a szögcsúcsokon vannak: C az egyiken, D a másikon.

### III.

**136.** Egyenlő szárú háromszög alapjának egy pontján át húzzunk a szárakkal párhuzamosokat. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamosokból a háromszög oldalai által kimetszett szakaszok hosszának összege nem függ a választott pont helyzetétől. Mekkora a kimetszett szakaszok hosszának összege?

**137.** Adjunk szerkesztési eljárást trapéz szerkesztésére, ha adott sorrendben ismerjük négy oldalának hosszát, valamint ismert, hogy az oldalak közül melyek az alapok.

## IV. ALGEBRA

### Egyenletek, egyenlőtlenségek

Oldjuk meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

$$1. \frac{3x-2}{6} + \frac{3-2x}{4} = \frac{1}{3} \qquad \frac{7x+6}{9} - \frac{2x-6}{15} = x \qquad 5 + \frac{3x-8}{5} = x - \frac{2x+1}{3}$$

$$2. (6x-5)(2x+5) + (4x-5)(1-3x) = 48 \qquad (2x+7)^2 - 4(x-3)(x+5) = 4-x$$

$$3. (3x+2)^2 + (3-4x)^2 = (5x-1)^2 \qquad (x-7)^2 - (3-2x)^2 = (6-x)^2 - (2x+2)^2$$

$$4. \frac{2x-4}{5} - \frac{x-1}{4} = 1 \qquad \frac{5x}{6} - \frac{2x}{9} = 1\frac{2}{9} \qquad \frac{x-3}{8} + 3 = \frac{3x+27}{20} - \frac{x+9}{12}$$

$$5. 1 - \frac{2x-5}{6} = \frac{3-x}{4} \qquad 7 - 2x - \frac{1-3x}{7} = 2 - \frac{2x-1}{3} \qquad \frac{2x-9-0,5 \cdot (2x-10)}{x+4} = 0$$

$$6. 1 + \frac{2(x-2,5)}{x-3} = \frac{1}{x-3} \qquad x + \frac{x+1}{4} = 2x + \frac{5-3x}{2} - \frac{x-3}{8} \qquad 14,5 - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{3x}{2} - \frac{2(x-7)}{33}$$

$$7. \frac{x+1}{x-5} = \frac{x+3}{x-6} \qquad \frac{9}{x-2} - 3 = \frac{x-3}{x-2} \qquad \frac{6x}{3x-2} - \frac{3}{2x-3} = 2 \qquad \frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-3}{x+2} = 1$$

$$8. \frac{1}{x-4} = \frac{x-2}{2x-8} \qquad \frac{9-x}{x-4} = \frac{5}{x-4} + 3 \qquad \frac{7-x}{x-6} - 5 = \frac{1}{x-6}$$

$$9. \frac{x-1}{3} + \frac{3x-1}{5} = 6 \qquad \frac{6x+4}{9} - \frac{3x-2}{5} = 4 \qquad x - \frac{1-\frac{3x}{2}}{4} - \frac{2-\frac{x}{4}}{3} = 2$$

$$10. (x-1)^2 \geq (x+2)^2 - 10 \qquad \frac{x+3}{4x} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{12x} + \frac{1}{12} \qquad 2x + \frac{x^2-4}{x+2} = 1$$

$$11. 3x^2 + 6x = 8x^2 - 9x \qquad 5x^2 - 8x + 3(x+2)x = 0 \qquad x(x+3) = 4x - 6x^2$$

$$12. \frac{4x-6}{5x-7} = 9 - \frac{3x-19}{5x-7} \qquad \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-2} = \frac{1}{3} \qquad \frac{x}{x-4} = \frac{8}{x-4}$$

$$13. \frac{2-6x}{3-x} = 3 + \frac{3x+4}{x-3} \qquad \frac{x+1}{x+7} : \left( \frac{1}{2} - \frac{x+1}{x+7} \right) = -4 \qquad \frac{1}{x-2} - \frac{10}{x+1} = \frac{9}{(x-2)(x+1)}$$

$$14. \frac{x}{x+7} + \frac{x-4}{x-5} = 2 \qquad \frac{8-x}{x-7} = 8 + \frac{1}{x-7} \qquad \frac{2(y-1)}{y-8} - 1 = \frac{14}{y-8}$$

$$15. \frac{4-3x}{3} < \frac{2x-1}{4} - \frac{5x-2}{6} \qquad \frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} \geq \frac{5x+1}{3} \qquad \frac{3x-5}{2} - \frac{2x-1}{3} < -2$$

$$16. \frac{2(y-1)}{y-8} - 1 = \frac{14}{y-8} \qquad \frac{2x}{x-1} - \frac{x-1}{2x} = \frac{3}{2} \qquad 1 - \frac{\frac{1}{\frac{x-1}{3}}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{10(x-5)}{x-2} : \frac{3x-2}{x-2} = 2$$

$$17. \frac{2x}{x+3} + \frac{x-5}{x+1} = 3 \qquad \frac{2x+1}{x} = \frac{4x^2-1}{2x^2-x}$$

18. Melyik racionális számra gondoltunk? A gondolt szám háromszorosánál eggyel nagyobb számot osszuk el a gondolt szám háromszorosánál eggyel kisebb számmal. Az eredményhez adjuk hozzá a gondolt szám kétszeresének és a gondolt számnál kettővel nagyobb számnak a hányadosát. Így eredményül hármat kapunk.

$$19. (x-6)(x+23) = (x+6)(x+23) \quad (x+6)(x-23) = (x+6)(x-23)$$

$$(x+6)(6x-23) = (x+6)(x-23)$$

20.

$$3 \cdot (2x-7) - 4 \cdot (5-2x) = 3x+3;$$

$$2 \cdot (4x-3) - 3 \cdot (3x-1) - 4 \cdot (x+1) = 5$$

$$\frac{1}{2} \cdot (x+7) - \frac{1}{3} \cdot (2x-4) = 1$$

$$\frac{2x-4}{3} + \frac{x-4}{2} = 2x$$

$$\frac{x-4}{x+3} - \frac{x+2}{x+3} = 3$$

21.

$$3 \cdot (x-4) - 2 \cdot (3-4x) > 4-x$$

$$\frac{x-7}{5} - \frac{x+3}{2} \geq \frac{x+1}{10}$$

22.

$$a) (x+3) \cdot (2x-1) \geq 0;$$

$$b) (x-1) \cdot (x+2) < 0;$$

$$c) (3x+7) \cdot (x-5) \leq 0;$$

$$d) (2x-4) \cdot (5-x) < 0;$$

$$e) (4x+13) \cdot (5x+1) > 0;$$

$$f) (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4) > 0;$$

$$g) (3x-7) \cdot (4-x) \cdot (5+x) < 0;$$

$$h) (3x+4) \cdot (2x+5) \cdot (4x-3) \cdot (3x-5) \geq 0$$

### Törtes egyenlőtlenségek

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket:

$$23. \frac{x-3}{x} \geq 0 \quad \frac{4-x}{x-1} < 0 \quad \frac{3x+2}{2x-1} \leq 0 \quad 1 < \frac{x+1}{x+2} \quad \frac{2x-3}{3-x} \geq 4 \quad \frac{5-2x}{3+x} \leq 1$$

$$24. \frac{5-a}{2-3a} \geq 0 \quad \frac{3(4-x)}{1-3x} > 0 \quad \frac{2-z}{z-4} \geq 0 \quad 0 < \frac{2x-3}{3x-6} \quad \frac{x-4}{2x-3} \leq 0 \quad \frac{2x+1}{3x+2} < 0$$

$$25. \frac{1-2z}{4-3z} \leq 0 \quad \frac{5-y}{y-4} \leq 0 \quad \frac{x+2}{(x+3)^2} > 0 \quad \frac{2x-7}{4-x} > 1 \quad \frac{3x}{2x+1} > 1 \quad \frac{5x-5}{3x-2} > 1$$

$$26. \frac{4x+6}{7x-2} \leq 1 \quad \frac{3-6x}{2x+1} > -5 \quad \frac{2x+3}{3x+2} \leq 2 \quad 2 < \frac{3x+1}{2x-5} \quad \frac{3(1-4a)}{2a+1} \geq -9 \quad \frac{3-5x}{2x-5} < -3$$

$$27. \frac{4x-7}{x+3} < 0 \quad \frac{3x-4}{2x+1} \geq 0 \quad \frac{4x+7}{3x-2} < 0 \quad \frac{2x-1}{x+7} \geq 3 \quad \frac{2x+3}{x-5} \leq -2 \quad \frac{4x-9}{2-3x} \leq 1$$

## Paraméteres egyenletek

Oldjuk meg a paraméteres egyenleteket. Az egyenletekben  $x$  az ismeretlen, a többi betű a paramétert jelöli.

28.

$$x - 3a = 10a \quad 6x + 4b = x + 14b \quad ax = b \quad 2(x - 3a) = x + 14b \quad ax = 4x + 5$$

29.  $5x = a \quad ax = 8 \quad 4 + cx = 3(x - 1) \quad ax + 5 = x(4 - a) \quad 6(x + 7) = 3(t + x)$

30.

$$10 - 2x = cx + 6x \quad 10(3 - x) = 5t + 7(t - x) \quad 3 + bx = 2(x + 4) \quad px + 5x = 8 - x$$

31. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol  $a, b, c$  és  $d$  valós paraméter.

|                                       |                            |                                       |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| a) $ax = 3a$ ;                        | b) $bx + b = 3$ ;          | c) $cx + 4 = 2x$ ;                    |
| d) $ax - 5a + 3 + 4x = 2a - 1$ ;      | e) $dx - 1 = d - x$ ;      | f) $(a - 3) \cdot x = a^2 - 9$ ;      |
| g) $(b - 2) \cdot x = b^2 - 4b + 4$ ; | h) $cx - c^2 = -4x - 16$ ; | i) $(d^2 + d) \cdot x = d^2 + 2d + 1$ |

32. Fejezzük ki az egyenletből az  $a$ -t:  $v = at + \frac{a}{2}t^2$

33. Fejezzük ki az egyenletből a  $g$ -t:  $s = \frac{g}{2}t^2$

35. Fejezzük ki az egyenletből az  $M$ -et:  $P = f \cdot \frac{mM}{R^2}$

35. Oldjuk meg az egyenletet, amelyben  $p$  paraméter:

$$px + 2 = 2x + p \quad \frac{p-1}{x} = \frac{p}{x+1} \quad p = \frac{x+1}{x-1} \text{ (nagyon szép az eredménye)}$$

## Törtés egyenlőtlenség és paraméteres egyenlet ugyanabban a feladatban

36. Oldjuk meg az egyenletet  $x$ -re, majd számítsuk ki, hogy a  $t$  paraméter mely értékei esetén teljesül, hogy az egyenlet megoldása (vagyis az  $x$ ) pozitív.

$$3(2 - x) = 4(t - 2x) \quad (3 - x)t = 8x$$

37. Oldjuk meg az egyenletet  $x$ -re, majd számítsuk ki, hogy a  $c$  paraméter mely értékei esetén teljesül, hogy az egyenlet megoldása (vagyis az  $x$ ) negatív.  $(x + 6)c = 7x$

38. Oldjuk meg az egyenletet  $x$ -re, majd számítsuk ki, hogy a  $k$  paraméter mely értékei esetén teljesül, hogy az egyenlet megoldása (vagyis az  $x$ ) negatív.  $k - 2 = \frac{3x+1}{x+1}$

39. Az „ $a$ ” illetve a  $t$  paraméter mely értékei esetén teljesül, hogy az egyenlet megoldása (vagyis az  $x$ ) pozitív?

$$(x + 2)(a - 1) = 3ax \quad 6(2 + x) = tx$$

40. A  $p$  paraméter mely értékei esetén teljesül, hogy az egyenlet megoldása (vagyis az  $x$ ) pozitív?

$$\frac{2}{x-1} = 4 - p$$

41. A  $p$  paraméter mely értékei esetén lesz az egyenlet gyöke (az  $x$ ) pozitív, negatív illetve 0?

$$3(x - p) = \frac{3x-7p}{5} + 1$$

$$2(3 + x) = px$$

### Másodfokú egyenletek

*Teljes négyzetté kiegészítés és a másodfokú egyenlet megoldóképlete*

42. Alakítsuk át a másodfokú kifejezéseket teljes négyzetté:

$$x^2 - 2x - 3 \quad a^2 + 4a + 6 \quad a^2 + 6a + 1 \quad x^2 - 8x + 20 \quad a^2 - 10a + 2$$

43. Alakítsuk át a másodfokú kifejezéseket teljes négyzetté:

$$x^2 - 6x + 4 \quad x^2 + 12x + 40 \quad x^2 - 10x - 1 \quad 3x^2 - 18x + 12 \quad -x^2 + 8x - 6$$

44. Ábrázoljuk:  $y = x^2 - 4x + 4$   $y = x^2 - 4x + 7$

45. Jellemezzük a következő függvényt:  $y = (x + 1)^2 + 2$

46. Oldjuk meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad x^2 - 4x - 12 = 0 \quad x^2 - 4x - 13 = 0$$

47. Mi a függvény értékkészlete?  $y = x^2 + 2x + 2$   $y = -x^2 + 2x - 6$

48. Oldjuk meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad x^2 + 4x + 12 = 0 \quad x^2 + 8x + 12 = 0 \quad x^2 + 12x + 27 = 0$$

49. Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket:

$$2x^2 + 4x - 6 \quad 3x^2 - 5x - 2 \quad 4x^2 + x - 3 \quad 2x^2 + 3x - 2$$

50. Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket:  $x^2 + 16x + 4$   $x^2 - 20x + 7$

$$2x^2 - 8x + 13 \quad 3x^2 - 12x + 7 \quad -x^2 - 10x + 2$$

51. Alakítsuk át a másodfokú kifejezéseket teljes négyzetté:

$$2x^2 - 16x + 26 \quad -x^2 - 6x + 3 \quad -x^2 + 12x + 1 \quad 3x^2 + 12x + 2$$

52. Ábrázoljuk a következő függvényeket:  $f(x) = x^2 - 8x + 18$   $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$f(x) = x^2 + 10x + 24 \quad f(x) = x^2 - 10x + 25 \quad f(x) = 2x^2 + 4x + 3$$

53. Ábrázoljuk a következő függvényeket:  $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$   $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

$$f(x) = -x^2 - 10x - 21 \quad f(x) = -3x^2 - 12x - 9$$

54. Oldjuk meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad x^2 + 4x + 12 = 0 \quad x^2 + 8x + 12 = 0 \quad x^2 + 12x + 27 = 0$$

55. Oldjuk meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket:

$$x^2 + 12x + 20 = 2x + 11 \quad x^2 + 19x - 1 = 11x + 8 \quad x^2 - 6x + 51 = 10x + 12$$

Oldjuk meg a megoldóképlettel:

56.  $3x^2 - 5x + 53 = 2x^2 + 9x + 5x^2 + 3x - 4 = 0$      $x^2 + 4x - 5 = 0$      $x^2 - 8x + 15 = 0$

57.  $x^2 - 4x - 21 = 0$      $2x^2 - 5x - 2 = 0$      $2x^2 - 20x + 50 = 0$      $3x^2 - 5x - 12 = 0$

58.  $3x^2 + 11x + 6 = 0$      $4x^2 + 15x - 4 = 0$      $13x^2 + 11x + 4 = 0$

$15x^2 + x - 6 = 0$      $-x^2 + 14x - 49 = 0$      $-6x^2 + 5x + 4 = 0$      $-12x^2 + x + 35 = 0$

$2x^2 + 4x - 6 = 0$      $3x^2 - 5x - 2 = 0$      $4x^2 + x - 3 = 0$      $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$4x^2 + x - 3 = 0$      $3x^2 + 2x - 8 = 0$      $4^2 - 4x - 45 = 0$

59. Határozzuk meg  $c$  értékét úgy, hogy az  $y = x^2 - 8x + c$  függvény minimumértéke  
a) 5 legyen, b)  $-10$  legyen.

60. Határozzuk meg  $p$  és  $q$  értékét úgy, hogy az  $y = x^2 + px + q$  függvény a) minimumhelye 3, minimumértéke pedig  $-1$  legyen, b) minimumhelye 0, minimumértéke pedig 5 legyen.

61. Oldjuk meg a megoldóképlettel:

$3s^2 + 4s + 1 = 0$      $5x^2 + 11x + 8 = 0$      $n^2 = 26 - 11n$      $5x^2 - 11x + 8 = 0$

62. Hol van szélsőértékhelye és mennyi a szélsőértéke?  $y = -x^2 + 8x$

63. Ábrázoljuk:  $y = 3x^2 - 12x + 15$

64. Hol van maximuma és mennyi a maximumértéke?

$y = -x^2 + 10x$      $y = 2x^2 - 10x - 22$      $y = -x^2 - 8$

### Szöveges feladatok

#### Számjegyek

65. Két szám közül az egyik 20-szal nagyobb a másikonál. Ha a kisebb számot elosztjuk 7-tel, a nagyobbat 5-tel, akkor az első hányados 8-cal kisebb, mint a második. Melyik ez a két szám?

66. Melyik az a négy egymást követő egész szám, amelyek közül az első és harmadik szorzata 27-tel kevesebb, mint a második és a negyedik szorzata?

67. Egy kétjegyű számban a tízesek száma 2-vel több, mint az egyesek száma. Ha a két számjegy közé beiktatjuk a két számjegy átlagát (azaz számtani közepét), akkor az eredeti szám jegyeinek felcserélésével keletkező kétjegyű szám 18-szorosát kapjuk. Határozzuk meg az eredeti kétjegyű számot.

### *Életkor*

68. Egy 28 éves apának a fia 2 éves. Hány év múlva lesz az apa háromszor annyi idős, mint a fia?
69. Péter édesapja 36 éves. Amikor Péter született, apja kétszer olyan idős volt, mint Péter most. Hány éves Péter most?
70. Hány éves most az, aki 10 év múlva négyszer annyi idős lesz, mint amennyi 20 évvel ezelőtt volt?
71. András így adta meg az életkorát.” Három év múlva feleannyi idős leszek, mint amennyi Balázs hat évvel ezelőtt volt, amikor én harmadannyi éves voltam, mint amennyi Balázs most.” Hány éves András?

### *Mozgás*

72. Két kerékpáros egyszerre indul el egymással szemben 130 km távolságból. Az A-ból induló 15 km/ó, a B-ből induló 12 km/ó állandó sebességgel halad. Az indulástól számítva hány óra múlva és hol találkoznak?
73. Két helység, A és B távolsága 15 km. Az A-ból elindul egy biciklista B felé 16 km/ó sebességgel és ugyanekkor elindul B-ből egy gyalogos A felé 5 km/ó sebességgel. Elindulásuk után hány perccel lesz a kerékpáros fele akkora távolságra a B helységtől, mint a gyalogos az A helységtől?
74. Az A helységből 8 órakor elindul egy autó a B helységbe 40 km/ó átlagsebességgel. Egy másik jármű 8 óra 45 perckor indul el B helységből A helységbe 60 km/ó átlagsebességgel. Azonos útvonalon mozognak és mindkét autó azonos időpontban érkezik célba tehát a B, illetve az A helységbe. Számítsuk ki a két helység távolságát.
75. Milyen messze van a falu a várostól, ha egy kerékpáros az oda-vissza utat 5 óra alatt tette meg, és a faluból a városba 12 km/ó, vissza pedig 10 km/ó egyenletes sebességgel haladt?
76. Kenuzásra indulunk egy folyón, amelyben a víz folyási sebessége 2,5 km/ó. A kenu sebessége állóvízben 7,5 km/ó. A folyón lefelé indulunk úgy, hogy 3 óra múlva vissza kell érni a kiindulási helyre. Hány km-re távolodhatunk el?
77. Két síelő ugyanazon a pályán siklik végig. Az első sebessége 2 km/ó-val kisebb a második sebességénél, ezért az utat 45 perccel hosszabb idő alatt teszi meg, mint a második. Mekkora a síelők sebessége, ha a másodiknak az út megtételéhez 3 órára volt szüksége?
78. Péter és Tamás versenyt futnak. Egy pillanatban Péter Tamás előtt van d távolságra. Péter sebessége ekkor v, Tamásé 50%-kal nagyobb. Ezzel a sebességgel mennyi idő múlva éri utol Tamás Pétert?

### *Együttes munkavégzés*

79. Egy munka elvégzéséhez az egyik munkásnak 12 napra, a másik munkásnak 10 napra van szüksége. Hány nap alatt végzik el a munkát együtt?
80. Egy gazdaságban az aratást két géppel 6 nap alatt tudják elvégezni. Ha a két aratógép együttes munkájával az aratás felét elvégzik és akkor az egyik gép kiválik, akkor egyedül a tovább dolgozó gépnek még 4,5 nap kell a munka befejezéséhez. Hány nap alatt végezne az aratással külön-külön mindegyik aratógép?

**81.** Három munkacsoport külön-külön öt, négy és fél, négy nap alatt végezne el egy munkát. Mennyi idő alatt készülnek el, ha az első csoport csak fele létszámmal vesz részt a munkában?

### *Oldat*

**82.** 1500 g 18%-os sóoldatból hány gramm vizet kell elpárologtatni, hogy az oldat 25%-os legyen?

**83.** Van 10 kg 60%-os alkoholunk és helyette ugyanennyi 70%-os alkoholra lenne szükségünk. A 60%-os alkoholból mennyi kellene 95%-os alkohollal kicserélni, hogy a kívánt 70%-os keveréket előállítsuk?

**84.** Egy medencét három csövön keresztül töltenek fel vízzel. Egyedül a csövek rendre 20, 30, 40 perc alatt tölténék fel a medencét. Egyszerre megnyitjuk őket, majd egy idő után az első kettőt elzárjuk. Ezután még egy perc kell ahhoz, hogy tele legyen a medence. Mennyi ideig voltak nyitva a csövek?

### *Vegyes szöveges feladatok*

**85.** Egy kártyajátékos elveszíti pénzének felét, majd nyer 50 forintot. Azután elveszíti a most meglévő pénzének egyötöd részét, majd nyer 40 forintot. Ezután elveszíti a meglévő pénze egyhatod részét, és nyer 50 forintot. Ekkor 350 forintja van. Mennyi pénzzel ült le kártyázni?

**86.** Két szám összege 100. Az egyik számmal 15%-a 13-mal kisebb, mint a másik szám 25%-a. Melyik ez a két szám?

**87.** Melyik az a száz egymást követő páros szám, amelyek összegéből levonva a köztük levő páratlan számok összegét, 99-et kapunk?

**88.** Egy olyan létrát készítünk, amelynek öt foka van. A fokokra 2,5 hosszú lécz áll rendelkezésre, hogy ezt feldaraboljuk. A legalsó fok 80 cm és felfelé haladva a fokok mindig ugyanannyival rövidülnek. Számítsuk ki az egyes fokok hosszát.

**89.** Egy piaci árus kosarában almák vannak. Az első megveszi az alma felét és még egyet. A második megveszi a maradék felét és még egyet. A harmadik megveszi a maradék felét és még egyet. Ekkor a kosárban 2 alma maradt. Mennyi volt eredetileg benne?

**90.** Egy konvex sokszögnek 25-tel kevesebb átlója van, mint a nála kettővel nagyobb oldalszámú konvex sokszögnek. Hány oldalú a két sokszög?

**91.** Egy táska árát 20%-kal csökkentették, majd 18%-kal felemelték, így az ár 3 776 Ft lett. Mennyi volt a táska eredeti ára?

**92.** Andi és Bandi reklámanyagok kézbesítését végzi. Andi egyedül 8 óra, Bandi 12 óra alatt tudná elvégezni a munkát.

a) Ha délután 15 órakor együtt kezdik a munkát, mikor fejezik be?

b) Mikor végeznek, ha Andi 15 órakor kezd, de Bandi csak 17 órakor csatlakozik hozzá?

c) Mikor lesz készen Bandi a munkával, ha 15 órakor együtt kezdenek, de Andi csak három órát tud dolgozni?

**93.** Anita és Tímea barátnők, egymástól 6 km-re laknak. Ha meg akarják egymást látogatni, az út gyalog mindkettőjüknek 1 órát vesz igénybe, ha kerékpárral mennek, akkor 20 perc alatt érnek a másik lakásához.

a) Egy alkalommal mindketten 6 órakor indultak el egymáshoz ugyanazon az útvonalon, Anita gyalog, Tímea pedig kerékpárral. Hány órákor találkoztak?

b) Egy másik alkalommal Tímea 7 órákor gyalog indult Anitahoz, aki 7 óra 10 perckor kerékpárral indult a barátnője elé. Mikor találkoztak?

c) Egy napon 8 órákor mindketten elindultak egymáshoz, Anita gyalog, Tímea pedig kerékpárral. Tímea valamit otthon felejtett, ezért az elindulás után 5 perccel visszafordult és hazament. Ott töltött 5 percet, majd újra elindult Anitahoz. Ezen a napon hány órákor találkoztak?

### Egyenletrendszer

Oldjuk meg az egyenletrendszereket:

$$94. \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y = 7 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$95. \begin{cases} 3x - 3y = 12 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x - 2y = -11 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 3y = 2,5 \end{cases}$$

$$96. \begin{cases} 3x = 5 + 4y \\ 2x - 8 = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - 17,5 + 3y = 0 \\ 8y = 3x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 7y - 31 = -5x \\ 7x - 5y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 2y - 13 = -3x \end{cases}$$

$$97. \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 7,2 \\ 3x - y = 0,8 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 3y = 14 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15 \\ y + \frac{y-x}{5} = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 17x + 18y = 342 \\ 34x + 36y = 680 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - y = 0 \\ 14x - 2y = 5 \end{cases}$$

**98.**

$$\begin{cases} 4x + y = 45 \\ 5x - (y - x) = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15 \\ y + \frac{y-x}{5} = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - y = 0 \\ 14x - 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 3y = 14 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 13y = 8 \\ 2x + 26y = 16 \end{cases}$$

$$99. \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2(x + 2y) - 3(3 + 3y) = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(x + 1) = 3(y - 1) + 14 \\ 4x - (2x + y - 1) = 2(y - x) + 8 \end{cases}$$

**100.** Egy tanuló azt mondta a barátjának: „Adj nekem 5 narancsot, akkor éppen kétszer annyi narancsom lesz, mint neked.” Ő ezt válaszolta: „Inkább te adj nekem három narancsot, akkor ugyanannyi narancsunk lesz.” Hány narancsuk van külön-külön?

**101.** Ha a jobb zsebemből 8 papírzsebkendőt átteszek a bal zsebembe, akkor ott háromszor annyi papír zsebkendő lesz, mint a jobb zsebemben. Ha viszont a bal zsebemből teszek hét papírzsebkendőt a jobb zsebembe, akkor ott lesz kétszer annyi zsebkendőm, mint a balban. Hány papír zsebkendő van egy-egy zsebemben?

Oldjuk meg az egyenletrendszereket új ismeretlen bevezetésével:

$$102. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{y-3} = 15 \\ \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y-3} = 8 \end{array} \right\}$$

$$103. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 8 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + \frac{5}{y} = 15 \\ 2x - \frac{25}{y} = 23 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{10}{x-5} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{array} \right\}$$

$$104. \text{ Oldjuk meg a háromismeretlenes egyenletrendszereket: } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ -x + y + z = 4 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x + z = 9 \\ x + z = 13 \end{array} \right\}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszereket:

$$105. \quad \left. \begin{array}{l} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{3x-y}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x-5}{4} + \frac{y-3}{7} = -1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+2y+1}{3} - \frac{x-2y+1}{2} = 0 \\ 7x-2y = 27 \end{array} \right\}$$

$$106. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{a}{3} - \frac{2b}{5} = 1 \\ 5a - 6b = 15 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2(x+y) + 4(x-y) = 3 \\ 3(x+y) + 6(x-y) = 4,5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x-3y}{2} - \frac{5x+y}{3} = 16 \\ \frac{x-3y}{8} = x+y+12 \end{array} \right\}$$

107. Két munkás közül az egyik 5 óráig, a másik 3 óráig dolgozik, és ekkor együtt 28000 forintot keresnek. Ha a másik dolgozik 5 óráig, és az első 3 óráig, akkor együtt 4000 forinttal keresnek kevesebbet. Mennyi a két munkát órabére külön-külön?

108. Két gyalogos egymástól 540 m távolságban van. Ha szembe mennek, akkor 3 perc múlva találkoznak. Ha egy irányban haladnak, akkor a másik 27 perc múlva éri utol az első gyalogost. Egyenletes mozgást feltételezve, hány méter utat tesznek meg külön-külön percenként, azaz mennyi a sebességük?

109. Ha egy tört számlálójából és nevezőjéből is egyet kivonunk, akkor egykettedet kapunk. Ha pedig az eredeti tört számlálójához és nevezőjéhez is egyet adunk, akkor kétharmad adódik. Melyik ez a tört?

$$110. \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 5y = 25 \\ 4x + 3y = 15 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4x - 3y = -4 \\ 6x + 5y = -7 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 7x - 3y = 15 \\ 5x + 6y = 27 \end{array} \right\}$$

111. Egy háromszög két-két oldalának hosszát összeadva 25, 33, 28 cm-t kapunk. Számítsuk ki a háromszög területének és oldalainak a hosszát.

**112.** Az A és a B helységek távolsága 20 km. A-ból elindul egy kerékpáros B felé, és ugyanakkor indul el egy autó B-ből A felé. Húsz perc múlva találkoznak, majd egyenletes sebességgel folytatva az utat újabb 40 perc elteltével egyenlő távol lesznek az A helységtől úgy, hogy az autó túlhaladt az A helységen. Mekkora a kerékpáros és az autó sebessége?

**113.** Két egér futkos egy kör kerületén. Ha egy irányban futnak, akkor 12 percenként, ha ellentétes irányban futnak, akkor 3 percenként találkoznak. Mennyi idő alatt futja be az egyik és a másik pont a kör kerületét?

**114.** Oldjuk meg az egyenletrendszereket.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{3}{5x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{3} \\ \frac{7}{10x} - \frac{5}{6y} = \frac{1}{15} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x+2y+3}{2x-3y+4} = \frac{7}{5} \\ \frac{6x-5y+4}{3x-2y+1} = \frac{11}{5} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{9}{x} + \frac{5}{2y+1} = 23 \\ \frac{7}{x} - \frac{3}{2y+1} = 11 \end{array} \right\}$$

**115.** Egy 60 km/ó egyenletes sebességgel haladó jármű 8 óra 40 perckor érkezik a céljához, míg egy 40 km/ó sebességgel haladó másik jármű ugyanazon az útvonalon 9 óra 5 perckor fut be a közös célba. Hány kilométerrel a közös cél előtt előzte meg a személyautó a teherautót?

**116.** Két szám számtani közepe 111, a két szám hányadosa 11. Melyik ez a két szám?

**117.** Két szám összege 561. Ha az egyik számot 6-tal osztjuk, akkor a hányados a másik szám és a maradék 1. Melyik ez a két szám?

**118.** Egy vadász nyulakat és foglyokat ejtett foglyul. Az elejtett állatoknak 17 fejük és 54 lábuk volt. Hány nyúl és hány fogoly van a fogolytáborban?

### Vegyes feladatok

**119.** Oldjuk meg az egyenletet x-re, majd számítsuk ki, hogy a p paraméter mely értékei esetén teljesül, hogy az egyenlet megoldása (vagyis az x) negatív.  $2 + p = \frac{p-2}{x-1}$

**120.** Oldjuk meg az egyenletet x-re, majd számítsuk ki, hogy a p paraméter mely értékei esetén teljesül, hogy az egyenlet megoldása egynél nagyobb.  $\frac{3-ax-a}{3} = \frac{x-2-a}{2}$

**121.** Két diák Tatabányáról egyszerre indul el Siófokra. Mivel különböző járművel vették fel a diákokat, az egyik 4 óra alatt, a másik, aki óránként átlagosan 5 km-rel kevesebbet tett meg, egy órával később ér Siófokra. Mekkora a diákok átlagsebessége? Milyen messze van Siófok Tatabányától?

**122.** Oldjuk meg az egyenlőtlenséget:  $\frac{2x}{5} - 1 < \frac{2x-1}{5} - \frac{x+1}{6}$

**123.** Bontsuk szét a 72-t négy részre úgy, hogy ha az első részhez ötöt adunk, a második részből ötöt kivonunk, a harmadik részt öttel megszorozzuk, a negyedik részt öttel elosztjuk, akkor mindig ugyanazt a számot kapjuk. Melyik ez a négy szám?

124. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket:  $\frac{3x-4}{x+1} \geq 0$      $\frac{2x-3}{x+4} \geq 0$      $\frac{3-5x}{x+1} \leq 1$

$$\frac{x+3}{x-4} > 0 \quad \frac{x-5}{x-2} \leq 0 \quad \frac{4x-3}{3x+1} \geq 0$$

$$\frac{11x-7}{5x-17} < 0 \quad \frac{2x+3}{x-1} \geq 2 \quad \frac{(x+4)(2x-3)}{x-2} \leq 0$$

125. Egy vasúti kocsiban háromszor annyi férfi utazik, mint nő. Az egyik állomáson négy férfi a feleségével leszáll. Ekkor négyszer annyi férfi maradt a kocsiban, mint nő. Eredetileg hányan utaztak a kocsiban?

126. Oldjuk meg:  $\frac{p-2}{p-1} \geq 1$      $\frac{7x-3}{5x-1} < 1$      $\frac{8x-3}{6x-3} \cdot \frac{3x-4}{4x-5} = 1$

127. Egy folyami hajó 100 km-t haladt a folyón felfelé és 64 km-t lefelé összesen 9 óra alatt. Más alkalommal 9 óra alatt 80 km-t ment felfelé és ugyanennyit lefelé. Egyenletes mozgást feltételezve mennyi a hajó sebessége állóvízben és mekkora a folyó sebessége?

128. Egy turista minden nap elkölti a pénzének a felét és még 1000 forintot. Így a pénze három nap alatt elfogy. Mennyi pénze volt eredetileg?

129. Egy iskolában a fiúk és a lányok létszáma összesen 1400. Egy alkalommal a fiúk 18%-a és a lányok 22%-a lett kitűnő. Így az összes diák 21%-a lett kitűnő. Hány fiú és hány lány jár ebben az iskolába?

130. Egy téglalap kerülete k méter. Az egyik oldala d méterrel hosszabb, mint a másik. Mekkora a téglalap oldalai? Ki kell tehát fejezni a téglalap oldalait k-val és d-vel.

102. Oldjuk meg az egyenletrendszereket:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3x+5y}{4} - \frac{x-y}{3} = -\frac{7}{6} \\ \frac{y-2x}{7} + \frac{3y-x}{2} = -\frac{17}{7} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} \\ 3x-1 = -y + \frac{x+2}{3} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x+y+z+u = 4500 \\ x+400 = y \\ x+200 = 2z \\ x+200 = \frac{u}{2} \end{array} \right\}$$

131.  $\left. \begin{array}{l} 12x+16y+1=0 \\ 15x+20y+10=0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 21x-9y+3=0 \\ 4x-5y+17=0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2(x+y)+4(x-y)=3 \\ 3(x+y)+6(x-y)=4,5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5} \\ \frac{x+4}{y+4} = \frac{2}{5} \end{array} \right\}$

132.  $\left. \begin{array}{l} x + \frac{3}{4}y = 9 \\ \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{1}{3} \\ 11x+2y=-1 \end{array} \right\} \quad \frac{12-4x}{x-3} + 1 = 0 \quad x + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

133. Egy osztály történelem dolgozat osztályzatai így alakultak: az osztály egyharmada négyes, kétszer annyi hármas lett, mint kettes, és másfélszer annyi ötös, mint hármas. Két egyes született. Így összesen az osztály egyhatoda írt hármasnál rosszabb dolgozatot. Hány fős az osztály?

134. Ha egy téglalap c oldalát 9 cm-rel megnöveljük, a d oldalát 3 cm-rel csökkentjük, akkor a területe nem változik. Akkor sem változik, ha a c oldalt 5 cm-rel csökkentjük, a d-t 4 cm-rel növeljük. Mekkora az eredeti téglalap két oldala?

**135.** Egy kis pangyi és egy kis murtyi egy kör alakú oázis körül keringenek. Ha szemben haladnak, akkor 10 percenként, ha egy irányban, akkor 20 percenként ha találkoznak. Mennyi idő alatt tesz meg egy kört a kis pangyi és a kis murtyi?

**136.** Oldjuk meg: 
$$\left. \begin{array}{l} x - 4y + z = 6 \\ 2x - y + 4z = 27 \\ x - y - z = 1 \end{array} \right\}$$

**137.** Egy öszvér és egy szamár több mázsás terhet cipelt. A szamár sokallta a magáét, és így szólt az öszvérhez: ha átvinnék a terhedből egy mázsát, az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd. Az öszvér így felelt: az ám, de ha te adnál át nekem egy mázsát a tiédből, akkor én már háromszor annyi súlyt cipelnék, mint te. Hány mázsát cipelt az egyik, hányat a másik?

### Nehezebb feladatok

**138.** Két 50-nél kisebb pozitív egész szám összege tízszer akkora, mint a különbsége. Mi lehet ez a két szám?

**139.**

Igazoljuk, hogy ha  $x \neq 0$  és  $y \neq 0$ , akkor

$$4 \cdot \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 12 \cdot \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 17$$

minden  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén nemnegatív.

**140.**

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a)  $(x-1)^2 + (x+2)^2 = 0$ ;

b)  $(x-2)^2 + |x+y-3| = 0$ ;

c)  $\sqrt{4x-y} + (x+6)^2 = 0$ ;

d)  $|3x-5| + |2x-y+1| = 0$

e)  $|7y+5| + |3x-2y+1| = 0$ ;

f)  $\sqrt{2x-6} + |x+y+5| = 0$ .

**141.** Szorzattá alakítással oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

$$4xy + 6x - 6y = 10$$

$$6xy + 15x - 4y = 21$$

**142.** Egy könyv 365 érdekes történetet tartalmaz, az év minden napjára egyet. Gergő év elején elkezdte olvasni a könyvet, minden nap elolvasott legalább egy történetet, de előfordult néha, hogy egy nap 4, máskor 5 történetet is elolvasott. Még 41 nap volt hátra az évből, amikor kiolvasta a könyvet. Hány nap fordult elő, hogy 4, illetve 5 történetet olvasott el?

**143.**

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a)  $\frac{3}{x+2} \leq \frac{7}{x-5}$ ;

b)  $\frac{x+2}{x-2} \leq \frac{x-1}{x+3}$ ;

c)  $\frac{2x+3}{x-3} \geq \frac{2x-5}{x-1}$

144.

Legyen  $x > 0$ ,  $y > 0$  és  $x + y = 1$ . Igazoljuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

145.

A  $\frac{3x+1}{2x-3} \leq \frac{3x+2}{2x+5}$  egyenlőtlenség megoldáshalmaza legyen  $H$ .

a) Van-e a  $H$  halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

b) Hány olyan természetes szám van, amely eleme  $H$ -nak?

c) Adjuk meg  $H$ -nak két olyan  $A$  és  $B$  részhalmazát, amelyekre igaz, hogy

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{és} \quad A \cup B = H.$$

146.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol  $a$  valós paraméter.

a)  $a \cdot (x + 6 - a) = 3 \cdot (x + 3);$

b)  $2a \cdot (x - 2a) = 4 \cdot (x - 4);$

c)  $(a - 3) \cdot (x - 4) - (2x + 1) \cdot (2 - a) = a^2 - x - 3 \cdot (a - 2);$

d)  $\frac{2ax}{3} + 1 = \frac{a+x}{2} - 1.$

147.

Ha  $a$  liter  $p\%$ -os és  $b$  liter  $q\%$ -os alkohololdatot összeöntünk, hány  $\%$ -os oldatot kapunk?

148. Oldjuk meg a racionális számok halmazán, ha  $a$ ,  $b$  és  $c$  paraméterek egész számok:

$$2bx + ax = x(a + b) + a + cx$$

149. Oldjuk meg a valós számok halmazán:  $\frac{x+p-2p^2}{p^2-x^2} = \frac{x+p}{p-x} + \frac{x}{p+x}$ , ha a  $p$  paraméter valós szám.

A  $p$  paraméter mely értékeire lesz az egyenletnek végtelen sok megoldása?

150. Oldjuk meg  $x$ -re az egyenletet.  $\frac{x-1}{a-x} + \frac{x-9}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2}$

151. Hogyan válasszuk meg a  $p$  paraméter értékét, hogy az egyenletnek minden valós szám megoldása legyen? Azaz mely  $p$  esetén teljesül, hogy  $x$  bármilyen értéke esetén az egyenlőség fennáll?

$$5(2p + x) - 2(6 - x) = 7(x - 4)$$

152. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán:

$$3x + 7y = 13$$

$$14x - 5y = 19$$

$$6x + 7y = 22$$

$$17x + 10y = 384$$

**153.** Egy tanuló azt állítja, hogy dédapja születési évszámának hétszerese 13-mal osztva 11-et, tizenháromszorosa 11-gyel osztva hetet ad maradékkal. Mikor született a dédapa?

**154.** Ha egy kétjegyű szám kétszereséből egy levonunk, akkor az eredeti szám számjegyeit kapjuk meg fordított sorrendben. Melyik ez a szám?

**155.** Egy háromjegyű szám számjegyeinek az összege 20. Ha a számból tizenhatot levonunk, az így nyert különbség fele olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei fordított sorrendben megegyeznek az eredeti szám számjegyeivel. Melyik ez a szám?

**156.** Oldjuk meg az egyenletrendszereket.

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{5x} + \frac{2}{3y} &= \frac{1}{3} \\ \frac{7}{10x} - \frac{5}{6y} &= \frac{1}{15} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} &= 7 \\ \frac{45}{2x-y} + 1 &= \frac{48}{x+3y} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x + y - z &= 11 \\ x - y + z &= 1 \\ y + z - x &= 5 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= -1 \\ 3x + 2y + z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

**157.** Egy sakkversenyen minden versenyző egyszer játszik mindenkivel. A második forduló után az egyik versenyző betegség miatt kénytelen feladni a versenyt, így összesen 15-tel kevesebb mérkőzésre kerül sor, mint tervezték. Hány versenyző nevezett eredetileg a versenyre?

**158.** Melyik az az  $\overline{abcd}$  négyjegyű szám, amelyre  $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2025$  ?

**159.** Egy kerékpáros kiránduló társaság Tihanyból Keszthelyre, majd ugyanazon az úton vissza túrázott a Balaton-felvidéken. Hegynek felfelé 15 km-t, lejtőn lefelé 30 km-t, vízszintes talajon 20 km-t haladtak óránként. Reggel 7-kor indultak és délután 7 órára érkeztek vissza. Csak Keszthelyen tartottak egy órányi pihenőt. Milyen hosszú utat jártak be ezen a napon?

**160.** Egy háromjegyű szám számjegyeinek az összege 20. Ha a számból 16-ot levonunk, az így nyert különbség fele olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei fordított sorrendben megegyeznek az eredeti szám számjegyeivel. Melyik ez a szám?

**161.** Milyen egész értékeket vehet fel az  $m$  paraméter, ha tudjuk, hogy az  $\left. \begin{aligned} x + 3y &= 12 \\ 21x + 62y &= m \end{aligned} \right\}$

egyenletrendszer megoldásaként adódó valós számok nemnegatívak?

**162.** Péter kétszer olyan idős, mint amennyi idős Pál volt akkor, amikor Péter olyan idős volt, mint Pál most. Amikor Pál annyi idős lesz, mint Péter most, akkor Pál éppen négyszer annyi idős lesz, mint Péter 12 évvel ezelőtt volt. Hány évesek most?

**163.** Oldjuk meg  $x$ -re a paraméteres egyenletet:

$$\frac{x-n}{m} - a = \frac{2x-m}{m} \quad (x+1)(a+b)(x-1)(a-b) \quad x\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = a\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)$$

## V. FÜGGVÉNYEK

### Ismétlő feladatok

1. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$f(x) = 2x - 3 \quad g(x) = -3x + 1 \quad h(x) = \frac{2}{3}x + 4 \quad i(x) = -\frac{2}{5}x - 3 \quad j(x) = \frac{1}{2}x - 4$$

2. Mely pontokban metszik a következő függvények az x és az y tengelyt?

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 5 \quad g(x) = -\frac{1}{3}x + 1 \quad j(x) = x - 7$$

3. Adjuk meg azt a függvényt, amelynek a grafikonja egyenes, amely egyenesen rajta van a következő két pont. a)  $D(0,4)$   $E(-2,-1)$  b)  $F(-2,4)$   $G(2,-8)$  c)  $B(3,0)$   $C(2,-1)$

4. Oldjuk meg grafikusán:

$$\begin{array}{lll} a) |x| - 2 = x; & b) 3x + 1 = 5 - |x|; & c) |x + 1| = 1 - \frac{x}{3} \\ d) |x| = 1 - |x - 2|; & e) 2 \cdot |x - 2| = 2x - 4; & f) x + 2 = x^2; \\ g) |x - 1| + |x + 3| = 6; & h) x^2 - 1 = 2x - 2; & i) \sqrt{x + 3} = \frac{x}{2}. \end{array}$$

5. Határozzuk meg grafikus úton, hogy  $x$  mely értékeire nullánál nagyobb, nullánál kisebb, nulla a következő függvények értéke.

$$f(x) = 3x - 8 \quad g(x) = |x - 2| - 4 \quad h(x) = x^2 - 9 \quad i(x) = \sqrt{x + 4} - 1$$

6. Ábrázoljuk:  $f(x) = |x - 3| + 1$     $g(x) = -|x + 2| + 3$     $h(x) = 2|x|$   
 $i(x) = |x + 4| - 2$     $j(x) = \frac{1}{3}|x - 1|$

7. Ábrázoljuk:  $f(x) = |x - 3| + 1$     $g(x) = -|x + 2| + 3$     $h(x) = 2|x|$   
 $i(x) = |x + 4| - 2$     $j(x) = \frac{1}{3}|x - 1|$

8. Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

$$f(x) = |x + 1000| + 1 \quad g(x) = -x^2 + 1 \quad h(x) = [x - 3]$$

$$i(x) = \{x\} - 40 \quad j(x) = (x - 1,9)^2 - 2,9$$

9. Határozzuk meg az  $f(x) = mx + 12$  függvényben az  $m$  értékét úgy, hogy a függvényérték  $x = 6$  esetén 9 legyen.

10. Melyik az a lineáris függvény, amelynek a grafikonja áthalad  $(-2, 4)$  és a  $(6, -2)$  ponton?

11. Ábrázoljuk, majd adjuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x - 5, & \text{ha } x \geq 2 \\ 3 - 2x, & \text{ha } x < 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 4, & \text{ha } x \geq 1 \\ -x^2 + 1, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

12. Add meg azt a lineáris függvényt, amelyiknek ismerjük két pontját:

$$A(3, -1), B(11, 3)$$

$$A(-2, 4), B(1, 7)$$

$$A(3, 2), B(1, 1)$$

13. Add meg azt a másodfokú függvényt, amelyre  $f(0) = 0$  és  $f(1) = 3$  és  $f(-2) = 2$ .

14. Mi a függvények értékkészlete?  $f(x) = 2[x]$

$$g(x) = \{x + 5\} \quad h(x) = [x - 3] - 1 \quad i(x) = 10\{x\} - 29 \quad j(x) = \begin{cases} [x], & \text{ha } x \text{ egész} \\ \{x\}, & \text{ha } x \text{ nem egész} \end{cases}$$

15. Ábrázoljuk:  $f(x) = |x^2 - 6|$   $g(x) = |x^2 - 6| - 2$

16. Milyen egymás utáni transzformációkkal kapjuk meg a  $g(x)$  függvényből az  $f(x)$  függvényt?

$$a) f(x) = 3 - 2|x + 4| \quad g(x) = |x| \quad b) f(x) = -3(x - 5)^2 + 1 \quad g(x) = x^2$$

### Egészrész függvény és törtrész függvény

17. Oldjuk meg grafikusan:

$$[x] - 1 \leq 2 \cdot |x| - 3 \quad \{x\} - 2 \leq -x^2 + 2 \quad 3\{x\} = 2[x] \quad \{x\} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

18. Oldjuk meg grafikusan:

$$\{x\} = |x - 3| - 2 \quad \{x\} - 4 = |x + 3| - 4 \quad x^2 - 4 = [x - 2] \quad 2 \cdot [x] + 3 = 2 \cdot |x| + 1$$

19. Oldjuk meg grafikusan:

$$-2\{x\} = \frac{1}{2}x - 1 \quad -(x + 2)^2 + 4 = -[x] \quad (x - 3)^2 - 2 < -|x - 2| + 4 \quad 4\{x\} - 2 = |x - 1| - 1$$

20. Gyártsunk két egyenletet, amelyeket grafikusan kell megoldani. Az ábrázolandó függvények a következők közül kerüljenek ki: másodfokú, abszolútérték, törtrész, egészrész. Az alapfüggvényekkel minden esetben legalább három transzformációt kelljen végrehajtani. A megalkotott egyenleteknek legalább 3-3 megoldása legyen. Oldjuk is meg az egyenleteket.

21. Oldd meg grafikusan:

$$(x - 2)^2 + 1 = 2[x] \quad \frac{1}{2}(x - 1)^2 = [x + 3] \quad \{x\} + 3 = -|x| + 5 \quad \{x - 2\} = -|x - 6| + 3$$

## Abszolút értékes függvények és egyenletek

22. Bontsuk fel az abszolút érték jelet:

$$|x - 1| = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases} \quad |x + 3| = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases} \quad |x - 7| = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases} \quad |x + 11| = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$$

23. Oldd meg grafikusan és algebrailag:

$$\begin{aligned} |x + 2| &= 2x + 2 & |x - 3| &= \frac{1}{2}x + 5 & |x| - 3 &= \frac{1}{2}x + 2 \\ |x - 6| &= \frac{1}{2}x & |x + 4| &= 2x + 5 \end{aligned}$$

24. Oldjuk meg algebrailag:  $|2x - 5| = x - 1$   $|x + 3| = 2x + 3$   $|3x - 2| + x = 1$

25. Oldd meg csak grafikusan:  $|x - 4| - |x - 1| = -\frac{1}{2}x + 2$   $|x + 2| + |x - 4| = \frac{1}{2}x + 4$

26. Ábrázoljuk a függvényt, majd írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát három részre szétbontva:  $f(x) = |x + 2| + |x - 4|$   $g(x) = |x - 4| - |x - 1|$

27. Oldjuk meg algebrailag és grafikusan:  $|x + 2| = 6 - 2x$

28. Oldd meg grafikusan:  $|x - 1| + |x - 2| = 2$   $|x - 1| + |x - 2| = 1$

$$||x + 2| - 3| = 1$$

29. Oldd meg grafikusan:

$$|x - 2| = 3 - |x + 1| \quad 3 - |x + 1| < |x - 2| \quad |x - 1| - 3 = 2 - |x|$$

$$2 - |x| < |x - 1| - 3$$

30. Bontsuk fel az abszolút érték jelet. A végeredmény ilyen alakú legyen:  $|x - 1| + |x - 2| = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

$$|x + 3| + |x - 2| = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad |x - 7| - |x + 3| = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad |x + 11| - |x + 4| = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

31. Oldjuk meg algebrailag és grafikusan:  $|x - 1| + |x - 2| = 2$   $|x + 3| + |x - 2| = 6$

32. Oldjuk meg kétféleképpen:  $|x - 4| - |x - 1| = -\frac{1}{2}x + 2$   $|x + 2| + |x - 4| = \frac{1}{2}x + 4$

33. Írjuk fel abszolút érték jel nélkül:  $|x + 1| - |x - 5|$   $|x + 10| + |x - 7|$

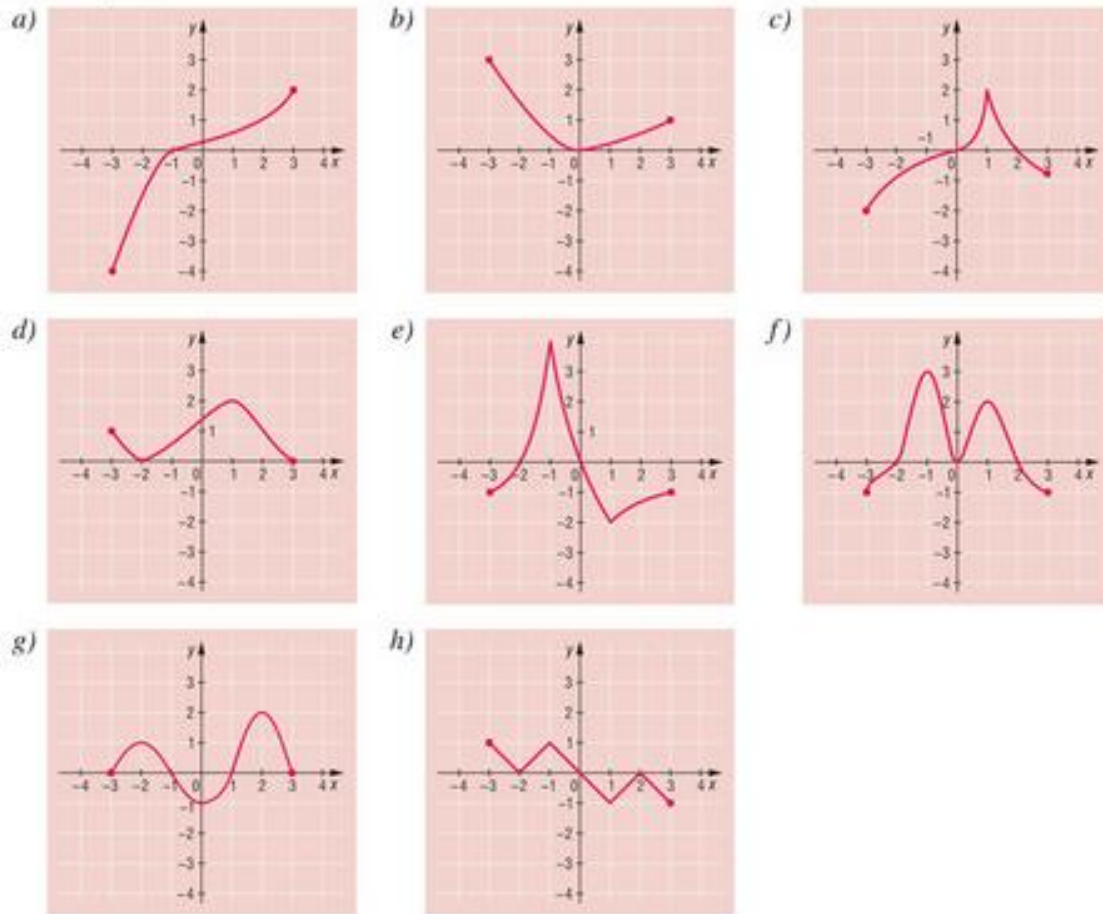
34. Oldjuk meg algebrailag:

$$\left| \frac{3x-2}{x-1} \right| = 2 \quad |x - 1| + |x - 2| = 1 \quad |x + 1| - |x - 5| = x - 3$$

35. Oldjuk meg algebrailag:  $||3x + 4| - 6| = 5$

## Függvényvizsgálat

**36.** Az ábrákon egy-egy  $[-3; 3]$  intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Mely intervallumokon növekszik, illetve fogy a függvény? Határozzuk meg a függvények szélsőértékeit, zérushelyeit.



**37.** Ábrázoljuk és végezzük el a függvényvizsgálatot:

$$f(x) = ||x - 1| - 3| \quad f(x) = 4\{x\} - 2 \quad f(x) = -(x + 2)^2 + 4 \quad f(x) = \frac{1}{2}[x] + 1$$

$$f(x) = ||x + 2| - 4| \quad f(x) = 2\{x\} - 3 \quad f(x) = -(x - 2)^2 + 6 \quad f(x) = [x - 3] + 4$$

**38.** Vázlatosan rajzoljuk meg a függvények grafikonjait és válaszoljuk meg, hogy a következő függvények hol van maximuma, hol van minimuma, mennyi a maximumérték és a minimumérték.

$$f(x) = (x - 3)^2 - 100 \quad f(x) = -|x| - 101$$

$$f(x) = |x - 1| + |x + 5| \quad f(x) = -\frac{1}{10}x - 1000 \quad f(x) = -x^2 - 2$$

**39.** Ábrázoljuk és végezzük el a függvényvizsgálatot:

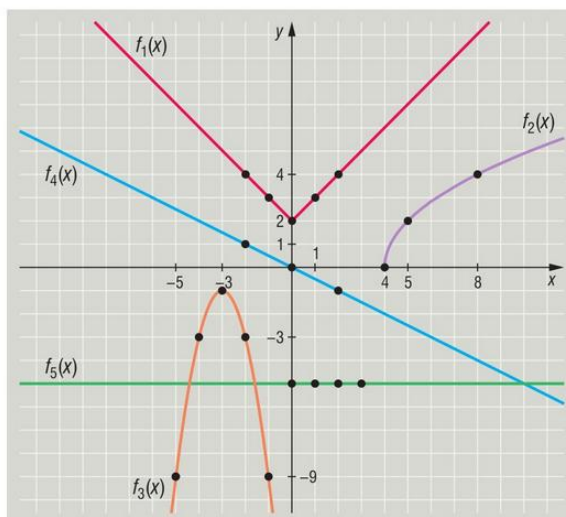
$$f(x) = \sqrt{x - 4} + 1 \quad f(x) = -\sqrt{x} + 2 \quad f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1 \quad f(x) = \sqrt{x - 6} - 4$$

$$f(x) = -\{x\} - 2 \quad f(x) = |x^2 - 4| \quad f(x) = |x - 3| + |x + 1|$$

40.

Állítsuk párba az ábrán látható függvényeket a hozzárendelési szabályukkal.

- a)  $x \mapsto |x| + 2$ ;
- b)  $x \mapsto -5$ ;
- c)  $x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x-4}$ ;
- d)  $x \mapsto -2 \cdot (x+3)^2 - 1$ ;
- e)  $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot x$ .



Válaszoljunk a következő kérdésekre.

- f) Melyik az egyenes arányosság függvény?
- g) Melyik függvénynek van zérushelye?
- h) Melyik függvénynek van maximuma? Határozzuk is meg.
- i) Az  $f_2(x)$  függvény milyen helyen veszi fel a 2 függvényértéket?
- j) Mennyi a meredeksége az  $f_5(x)$  függvénynek?
- k) Az  $f_1(x)$  függvénynek mennyi lesz az  $x = 1$  helyen vett függvényértéke?
- l) Igaz-e, hogy  $f_3(-2) = -3$ ?

41.

Melyek a szélsőértékei az alábbi függvényeknek, ha  $x \in [-3; 6]$ ? Hol veszik fel azokat? Ábrázoljuk is őket.

- a)  $a(x) = -\frac{1}{3} \cdot x$ ;
- b)  $b(x) = -3$ ;
- c)  $c(x) = |2x - 4|$ ;
- d)  $d(x) = -|x + 1|$ ;
- e)  $e(x) = \sqrt{x + 3}$ .

Hol pozitívak az adott függvények? A válaszokat intervallumokkal adjuk meg.

### A signumfüggvény

42. Ábrázoljuk:  $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 3)$     $f(x) = 4 \operatorname{sgn} x$     $f(x) = -\operatorname{sgn} x + 2$

$f(x) = \operatorname{sgn}(|x| - 1)$     $f(x) = \operatorname{sgn}(2x - 2)$     $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 9)$

43. Ábrázoljuk:  $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$     $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sgn} x}$     $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn} x$     $f(x) = \operatorname{sgn}(|x - 4| - 3)$

44. Ábrázoljuk és végezzük el a függvényvizsgálatot:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4) \quad f(x) = \operatorname{sgn}||x - 2| - 4|$$

45. Ábrázoljuk:  $f(x) = \operatorname{sgn}\{x\}$     $g(x) = \operatorname{sgn}[x]$     $h(x) = \operatorname{sgn} x^2$     $i(x) = (\operatorname{sgn} x)^2$

46. a) Oldjuk meg grafikusan:  $x = \operatorname{sgn}\{x\}$     $\operatorname{sgn} x < x$     $|\operatorname{sgn} x| = |x|$     $|\operatorname{sgn} x| < |x|$

b) Ábrázoljuk:  $y = \operatorname{sgn}(|x| - 5)$     $y = \operatorname{sgn}(x - 2)^2$

**Az  $y = \frac{1}{x}$  függvény és transzformációi**

47. Milyen értékeket nem vesz fel a függvény?  $y = \frac{1}{x}$      $y = \frac{2}{x+1}$      $y = \frac{1}{x-5} - 2$

48. Ábrázoljuk, majd jellemezzük a függvényeket a következő szempontok szerint:

É. T., É. K., zérushely, asszimptoták egyenletei  $y = \frac{1}{x}$      $y = \frac{1}{x-5}$      $y = \frac{2}{x} + 4$      $y = \frac{1}{x} - 3$

49. Végezzünk algebrai átalakítást a függvény képletén úgy, hogy függvénytranszformációk segítségével ábrázolni tudjuk. Ábrázolni nem kell.

$$y = \frac{x-3}{x-4} \quad y = \frac{x+3}{x-4} \quad y = \frac{x}{x+1} \quad y = \frac{2x+10}{x+3} \quad y = \frac{2x-5}{x+2} \quad y = \frac{4x+13}{x+3}$$

50. Állapítsuk meg az előző feladatban szereplő függvények asszimptotáinak egyenletét.

51. Ábrázoljuk az  $y = \frac{1}{x}$  függvény transzformációival a következő függvényeket:

$$y = \frac{1}{x+3} - 4 \quad y = \frac{2}{x-5} + 1 \quad y = \frac{2}{x-3} - 1 \quad y = \frac{x+2}{x+1}$$

$$y = -\frac{1}{x} - 4 \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

52. Mi a következő függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

$$y = \frac{x-1}{x+1} \quad y = 3 + \frac{2}{x-1} \quad y = \frac{2x+8}{x-1} \quad y = -4 - \frac{4}{x}$$

53. Végezzük el a szükséges algebrai átalakítást, majd állapítsuk meg a függvény asszimptotáinak egyenletét.  $y = \frac{4x-7}{x-2}$      $y = \frac{7x+52}{x+8}$      $y = \frac{x-2}{x+1}$

54. Oldjuk meg grafikusán és algebrailag:  $\frac{x-1}{x-2} < 1$      $\left| \frac{3x+2}{x-1} \right| = 3$

55. Oldjuk meg grafikusán:  $\frac{2x+10}{x+2} = x^2 + 8x + 15$

56. Ábrázoljuk és végezzünk teljes függvényvizsgálatot (beleértve az asszimptoták egyenleteinek felírását is):  $y = -3 + \frac{2}{x+2}$

57. Oldjuk meg grafikusán:  $\frac{x+1}{x+3} < \frac{3x-1}{x-2}$      $\frac{x}{x-2} < \frac{2x-3}{x+1}$      $\frac{x-5}{x+3} \geq \frac{x+1}{x-2}$

58. Oldjuk meg grafikusán:  $\frac{1}{x+4} + 3 < 7$      $\frac{2}{x-2} \leq 5$      $\frac{2x+5}{x+3} < 4$      $\frac{1}{x} + 7 < -\frac{1}{x} - 4$

59. Oldjuk meg grafikusán és algebrailag:  $\frac{2x+3}{x-5} \leq -2$

60. Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

$$y = \frac{x-1}{x+1} \quad y = 3 + \frac{2}{x-1} \quad y = \frac{2x+8}{x-1} \quad y = -4 - \frac{4}{x}$$

## Vegyes feladatok

61. Mi a függvény menete, ha  $x > -\frac{3}{2}$ ?  $y = x^2 + 3x + 9$

62. Oldjuk meg algebrailag:  $\frac{x+1}{x+3} = \frac{3x-1}{x-2}$        $\frac{x}{x-2} = \frac{2x-3}{x+1}$

63. Oldjuk meg algebrailag:  $\frac{2x-1}{x+7} \geq 3$        $\frac{2x+3}{x-5} \leq -2$        $\frac{2x+1}{x+7} \leq 0$        $\frac{3x-4}{2x+1} \geq 0$

64. Oldjuk meg grafikusan:  $2x < |x^2 - 2x - 8|$        $\operatorname{sgn}\left(1 + \frac{3}{x-2}\right) = |x+3| - 2$

65. Az  $|x+3| - 2 = p$  egyenletnek a  $p$  (valós szám) paraméter értékétől függően hány megoldása van? Gondolkodjunk grafikonban.

66. Oldjuk meg grafikusan és algebrailag:

$$|x+2| + |x-1| = \frac{1}{2}x + 6 \quad |x+1| - |x-3| = \frac{1}{2}x - 2$$

67. Végezzük ez a teljes négyzetté kiegészítést, majd állapítsuk meg a függvény értékkészletét, szélsőérték helyét, szélsőértékét, és a növekedési viszonyait.  $y = -x^2 + 2x - 6$

68. Ábrázoljuk:  $y = \operatorname{sgn}[x]$        $y = \left|2 + \frac{1}{x-4}\right|$        $y = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x} + 2\right)$

69. Ábrázoljuk és végezzünk teljes függvényvizsgálatot:  $y = |x^2 + 2x - 2|$        $y = \left|2 + \frac{1}{x+4}\right|$

70. Oldjuk meg grafikusan:  $\frac{2x-3}{x+1} \geq \frac{x}{x-2}$

71. Hol van maximuma és mennyi?  $y = -x^2 + 10x$        $y = 2x^2 - 10x - 22$        $y = -x^2 - 8$

72. Az értelmezési tartomány mely elemeihez rendel a függvény pozitív értéket?  $f(x) = x^2 + 5x + 4$

73. Ábrázoljuk és végezzünk függvényvizsgálatot:  $y = \frac{x}{\operatorname{sgn} x - 2}$

74. Oldjuk meg grafikusan:  $\frac{3x-10}{x-4} \leq -(x-5)^2 + 5$ , algebrailag:  $x^2 - 5x - 14 = 0$

75. Ábrázoljuk:  $y = \left[\frac{1}{x}\right]$        $y = \frac{1}{[x]}$        $y = \left\{\frac{1}{x}\right\}$        $y = \frac{1}{\{x\}}$        $y = |x^2 + 2x - 2|$

76. Oldjuk meg valahogy:  $\frac{1}{2}x + |x-5| = 7$        $|x+5| - |2x-1| = x+2$        $|x-2| + |x-3| = 11$

77. Oldjuk meg grafikusan és algebrailag:  $\frac{2x+5}{x+3} < 4$

78. Oldjuk meg algebrailag:  $(1+2x)(3-x) + x^2 = 9$        $\frac{x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3x^2-10x}{15x}$        $\frac{2}{x+1} - 2 = \frac{x}{x-1}$

79. Ábrázoljuk és jellemezzük:  $y = x^2 - 8x + 12$

80. Az értelmezési tartomány mely elemeihez rendel az  $y = x^2 - 5x + 4$  függvény pozitív értéket?

81. Oldjuk meg algebrailag és grafikusan:  $|x - 5| = 7 - 0,5x$

82. Adjuk meg azt a hozzárendelési szabályt, amely egy tetszőleges kör területéhez a kör sugarát rendeli hozzá. Majd ábrázoljuk a függvényt.

83.

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{lll} a) (x-2)^2 - 1 = |x-1|; & b) 2 - |x+1| = 1 - (x+2)^2; & c) |x+2| = \sqrt{x+4}; \\ d) \sqrt{-1-x} - 4 = -1 - |x+4|; & e) ||x+3| - 2| = 1; & f) |(x-3)^2 - 4| = x-1 \end{array}$$

84. Egy labdát ferde hajítással felrúgnak, pályáját az idő (másodperc) függvényeként (méterben) az

$$f(x) = 10x - x^2$$

függvény írja le. Mennyi idő múlva esik le a labda, és milyen magasra jut? Az elrúgás után hány másodperc múlva lesz a legmagasabban?

85.

Ábrázoljuk a síkon azoknak a  $P(x; y)$  pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételt:

$$a) |x| = 0; \quad b) |x| = |y|; \quad c) |x| + |y| \geq 1; \quad d) |x| + |y| = 2.$$

86. Hány gyöke van a valós számok halmazán az egyenletnek:  $|x^2 - x| = |x|$ ?

87.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{lll} a) |x| + 4 = 8; & b) |x + 4| = 8; & c) |x| + 4 \geq 8; \\ d) |x + 4| \geq 8; & e) 2 \cdot |x| + 3 = 10; & f) 2 \cdot |x + 3| = 10; \\ g) |2x + 3| \leq 10; & h) |2x| + 13 > 10. \end{array}$$

### Nehezebb feladatok

88. Alkossunk olyan függvényt, amelyre teljesül:

- a) az értékkészlete az összes valós szám, kivéve a 0 és az 1
- b) az értékkészlete a  $(-1, 1)$  intervallum
- c) az értelmezési tartománya az összes valós szám, van minimuma is és maximuma is
- d) az értelmezési tartománya az összes valós szám és egyik intervallumban sem monoton
- e)  $(-\infty, 0)$  intervallumban szigorúan monoton növekedő,  $(0, \infty)$  intervallumban szigorúan monoton csökkenő, és a 0-ban minimuma van.
- f) értelmezési tartománya a  $[0, 1]$  intervallum és nincs maximuma

89. Oldd meg grafikusan:

$$\frac{10}{\lfloor 2x \rfloor} > \lfloor x^2 \rfloor \quad \text{sgn}(\{x\}) > \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \quad ||x-2|| - 5 \leq \text{sgn} \frac{1}{x-3}$$

90. Hány megoldása van a következő egyenletnek a valós számok halmazán?  $\{x\} = \frac{x}{2025}$

91.

Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

a)  $|x| + |x + 5| \geq 7$ ;

b)  $|x - 3| - |x + 2| \leq 5$ ;

c)  $|2x - 3| + |x + 6| \geq 9$ ;

d)  $|4x - 5| + |5x - 4| \leq 2$

92. Adott a következő függvény:  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Határozzuk meg az  $f(f(x))$  és az  $f(f(f(x)))$  függvényeket.

93. Bontsuk fel a 40-et két összeadandóra úgy, hogy a két adott rész szorzata maximális legyen.

94.

Ábrázoljuk a következő intervallumokon értelmezett valós értékű függvényeket:

a)  $x \mapsto x \cdot |x - 3|$ ,  $x \in [-2; 4]$ ;

b)  $x \mapsto x^2 - 2 \cdot |x + 1| - 1$ ,  $x \in [-2; 2]$ ;

c)  $x \mapsto x \cdot |x| - 4x - 5$ ,  $x \in [-3; 3]$ ;

d)  $x \mapsto \frac{|x-1|}{x-1} \cdot (x^2 + 3)$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \in [-2; 2]$ .

95.

Ábrázoljuk a síkon azoknak a  $P(x; y)$  pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételeket:

a)  $|x + y| + |y - x| \leq 4$ ;

b)  $|2x| = |y|$ ;

c)  $|y| - |x| = 1$ .

96.

Vázoljuk a következő függvény grafikonját:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Igazoljuk, hogy a grafikon minden pontja az origótól 1 egység távolságra van.

97.

Ábrázoljuk azoknak a  $P(x; y)$  pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

$$y - 2 \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

98. Melyek azok a  $p$  valós számok, amelyekre az  $\left. \begin{matrix} xy = 1 \\ y = px + 1 \end{matrix} \right\}$  egyenletrendszernek egyetlen  $(x; y)$  valós számpár a megoldása? Grafikonon gondolkodjunk.

99. Ábrázoljuk és jellemezzük (zérushely, szélsőérték, monotonitás szempontjából) a következő függvényeket:

c)  $h(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ ,  $x \neq 2$ ,  $x \in [-1; 5]$ ;

d)  $i(x) = \frac{1}{x+3} - 4$ ,  $x \neq -3$ ,  $x \in [-6; 0]$

e)  $j(x) = \frac{2}{x-1} + 3$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \in [-2; 4]$ ;

f)  $k(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \in [-3; 2]$ ;

g)  $l(x) = \frac{2}{2-x} + 1$ ,  $x \neq 2$ ,  $x \in [-1; 5]$ ;

h)  $m(x) = \frac{1}{|x-1|}$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \in [-2; 2]$ .

100. Egy függvény alulról korlátos, ha van olyan szám, amelynél kisebb értéket nem vesz fel.

Egy függvény felülről korlátos, ha van olyan szám, amelynél nagyobb értéket nem vesz fel.

Egy függvény korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos.

Lássuk be, hogy ez a függvény korlátos:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$

## VI. KOMBINATORIKA

1. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
2. Hány 5-tel osztható ötjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
3. Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
4. Hány ötjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
5. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellett üljön?
6. Írjuk fel a TOLL szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?
7. Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány 13-mal kezdődő hétjegyű számot lehet készíteni?
8. Az 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető?
9. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető?
10. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a PANGYI szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

P A N G  
A N G Y  
N G Y I

11. A MATEMATIKA szó betűinek hány permutációja van, azaz hányféleképpen lehet a betűket sorrendbe állítani?
12. Tíz tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani három különböző tárgyat, ha egy tanuló legfeljebb egy tárgyat kaphat?
13. Egy 36-os létszámú osztályban egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki azzal a feltétellel, hogy egy tanuló csak egy tárgyat nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?
14. Egy 30-as létszámú osztály vezetőséget választ: titkárt, titkárhelyettest, kultúrfelelőst, sportfelelőst és gazdasági felelőst. Hányféleképpen történhet ez?
15. Az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből hány ötjegyű számot állíthatunk elő, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?
16. Tizenöt tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat úgy, hogy egy tanuló több tárgyat is kaphat?

17. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból az ISKOLAI szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

ISKOLAI  
SKOLAI  
KOLAI  
OLAI  
LAI  
AI  
I

18. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

19. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelyben az 5-ös előfordul?

20. Egy 32 lapos magyar kártyából egymás után kihúzzunk 6 lapot. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a kihúzott lapok sorrendje is számít?

a) visszatevés nélkül húzzunk, b) minden húzás után a kihúzott lapot visszatesszük

21. Egy hatelemű halmaznak hány háromelemű részhalmaza van? Írjuk le ezeket.

22. Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei csökkenő sorrendben következnek egymás után, egyenlő számjegyeket nem engedve meg?

23. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány ötelemű részhalmaza van?

24. Egy hatelemű halmaznak hány részhalmaza van?

25. Egy nyolcelemű halmaznak hány valódi részhalmaza van?

26. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely legalább hételemű?

27. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek negyedosztályú kombinációit.

28. Egy hétszemélyes társaságban mindenki mindenkivel kezét fog. Hány kézfogás ez összesen?

29. Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény?

30. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:  $\frac{n!}{(n-3)!}$   $\frac{n!}{n(n-1)}$

31. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:  $(n+2)(n+1)!$   $\frac{(n-2)!}{n-2}$

32. Piros, fehér, zöld és kék színű anyagokból zászlókat készítünk. Minden zászló vízszintes csíkokból áll, és a szomszédos csíkok nem lehetnek azonos színűek. Hány különböző zászlót készíthetünk, ha

a) egy-egy zászlón négy csíknak kell lennie, b) egy-egy zászlón három csíknak kell lennie, c) egy-egy zászlón két csíknak kell lennie?

**33.** Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a BUDAPEST szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

B U D A P  
U D A P E  
D A P E S  
A P E S T

**34.** Egy szabályos játékkocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk. Dobjuk fel ezt a játékkockát négyszer egymás után. A dobások eredményét a dobások sorrendjében írjuk egymás mellé. a) Hányféle négyjegyű számhoz juthatunk így? b) Hányféle 1-re végződő négyjegyű számot kaphatunk?

**35.** Egy szabályos játékkocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk. Dobjuk fel ezt a játékkockát ötször egymás után és a dobások eredményét írjuk rendre egymás mellé. Hányféle 10-zel osztható ötjegyű számhoz juthatunk így?

**36.** Egy szabályos játékkockával egymás után ötször dobunk. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben legalább egyszer hatost dobunk?

**37.** Hányféleképpen olvasható a következő elrendezésben a SZOLNOK szó, ha csak lefelé, és rézsút balra, illetve jobbra haladhatunk?

S  
Z Z  
O O O  
L L L L  
N N N  
O O  
K

**38.** Egy 32-es létszámú osztályban klubdelutánt rendeznek, ahol a tanulók között négy tombolatárgyat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha:

- a) a tárgyak egyenlők, és egy tanuló legfeljebb egy tárgyat nyerhet
- b) a tárgyak egyenlők, és egy tanuló több tárgyat is nyerhet
- c) a tárgyak különbözőek, és egy tanuló legfeljebb egy tárgyat nyerhet
- d) a tárgyak különbözőek, és egy tanuló több tárgyat is nyerhet?

**39.** Egy szabályos játékkockát hatszor egymás után feldobunk. A kapott eredményeket rendre egymás mellé írjuk. a) Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek? b) Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike előfordul?

**40.** Piros, fehér és fekete játékkockát helyeztünk el egy dobozba. Kettőt kiveszünk és dobunk velük. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

**41.** Hány 5-re végződő ötjegyű szám van?

**42.** Egy 32-es létszámú osztály az iskolai küldöttértekezletre hat küldöttet választ. Hányféleképpen történhet ez?

**43.** Egy 25-ös létszámú közösség háromtagú vezetőséget választ: titkárt és két vezetőségi tagot.

a) Hányféleképpen történhet ez? b) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Nagy Ági legyen a titkár? c) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Nagy Ági tagja legyen a vezetőségnek?

44. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy ász?
45. Egy 25 főből álló társaság tagjai között egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki. Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha egy személy több tárgyat is nyerhet?
46. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány olyan nyolcjegyű számot készíthetünk, amelyben a 4-esek száma egyenlő az 5-ösök számával?
47. A 4-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány 9-cel osztható nyolcjegyű szám készíthető?
48. Hány egyenest határoz meg 25 olyan pont, amelyek közül 3-3 nem esik egy egyenesbe?
49. Adott a síkban 25 pont, amelyek közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány háromszöget határoznak meg?
50. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből készíthető ötjegyű számok között hányban fordul elő az 1-es számjegy, ha egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?
51. A BKK járművein régen a jegyeket olyan lyukasztókkal kezelték, mellyel egy 3x3-as mezőben elrendezett 9 számjegyből 2, 3, illetve 4 mezőt kilyukasztottak ki. Hányféleképpen állíthatók be ezek a lyukasztók a követelményeknek megfelelően?
52. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A, B és C egymás mellett üljön?
53. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A a B mellé és C a D mellé ül?
54. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A ne kerüljön B mellé?
55. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A a pad szélére ül?
56. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A ne kerüljön a pad szélére?
57. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett négy férfi és három nő úgy, hogy a férfiak és a nők felváltva következzenek egymás után?
58. Hány különböző gyöngyöt lehet készíteni 20 gyöngyszemből, ha van:  
a) 10 fehér és 10 kék, b) 5 fehér és 15 kék, c) 8 fehér és 12 kék?  
Az azonos színű gyöngyszemek teljesen egyformák.
59. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 6 piros és 9 fehér golyót, ha csak azokat a húzásokat tekintjük különbözőnek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?
60. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 5 piros, 7 fehér és 3 kék golyót, ha csak az olyan húzásokat tekintjük különbözőknek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?

61. 5 piros, 2 fehér és 2 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy a 2 kék golyó egymás mellett legyen?
62. Dobjunk fel két szabályos játékkockát egymástól függetlenül. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben a kapott pontok összege 8?
63. Hány „szót” képezhetünk az A, E, I, O, U magán- és a B, C, D, F mássalhangzókból úgy, hogy minden „szóban” 4 magán- és 3 mássalhangzó legyen, két magán-, illetve két mássalhangzó egymás mellé ne kerüljön, és minden mássalhangzó csak egyszer szerepeljen?
64. Egy-egy cédulára írjuk fel rendre a 0, 1, 2 számokat. A cédulákat tegyük egy dobozba. Húzzunk ki egy cédulát, és jegyezzük fel a kihúzott számot. Ezután tegyük vissza a cédulát és ismételjük meg az eljárást még négyszer. Hány esetben lehet az ötödik húzás után a kihúzott számok összege:  
a) éppen 6, b) 6-nál nagyobb?
65. Az 1, 2, 3, ..., 15 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben a) az 1, 2 számok, b) az 1, 2, 3 számok csökkenő sorrendben kerülnek egymás mellé?
66. Az 1, 2, 3, ..., 25 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az  
a) 1, 2, 3, ..., 10 számok  
b) az 1, 2, 3, ..., 15 számok egymás mellé kerülnek növekvő sorrendben?
67. Hány 5-tel osztható hétjegyű szám készíthető az 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 számjegyekből?
68. Hány hétjegyű páratlan szám készíthető az 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 számjegyekből?
69. Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány olyan hétjegyű számot lehet készíteni, amelyben a kettes számjegyek egymás mellett állnak?
70. Hány nyolcjegyű szám képezhető a 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 számjegyekből?
71. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából húzzunk ki találmra öt lapot. Hány esetben lesz a kihúzott öt lap közül három hetes?
72. Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyát négy játékos között szétosztani úgy, hogy mindegyik nyolc lapot kapjon?
73. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy  
a) legalább egy zöld színű lap, b) legfeljebb három hetes, c) a zöld hetes a kiválasztott lapok között legyen?
74. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány négyjegyű számot állíthatunk elő:  
a) egy számjegy felhasználásával  
b) két különböző számjegy felhasználásával  
c) három különböző számjegy felhasználásával  
d) négy különböző számjegy felhasználásával?
75. Egy dobozban 10 cédula van, rendre 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után négy cédulát húzzunk ki úgy, hogy a kihúzott cédulákat a húzás után nem tesszük vissza. A kihúzott cédulákon lévő számjegyeket a kihúzás sorrendjében írjuk egymás mellé. Hány esetben kapunk:  
a) páratlan négyjegyű számot, b) 10-zel osztható négyjegyű számot, c) 25-tel osztható négyjegyű számot?

**76.** 16 csapatot területi alapon két nyolcas csoportba osztottak. Az egyes csoportok első, második, illetve harmadik helyezette játszik az első-második, harmadik-negyedik, illetve ötödik-hatodik helyért a döntőben. Hányféle döntő lehetséges?

**77.** Egy sakkversenyen az egyik versenyzőnek az ötödik forduló után 3 pontja van. Hányféleképpen érhet el a versenyző ezt a 3 pontot, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben érte el eredményeit? (A sakkversenyen győzelem esetén 1, döntetlen esetén 0,5 pontot kapnak.)

**78.** Valamely sakkversenyen egy játékosnak a hatodik forduló után 4 pontja van. Hányféleképpen jöhetett létre ez az eredmény? (Nyert játszma 1 pont, döntetlen 0,5 pont, veszített játszma 0 pont.)

**79.** Egy pályázatra 20 pályamű érkezett, amelyek közül 9-et nők és 11-et férfiak küldtek be. Három pályamunkát díjaznak, egyenként 5000 Ft-tal. (A díjakat megosztani nem lehet.)

a) Hány eset lehetséges a díjazás szempontjából?

b) Hány esetben lehet a díjazottak között egy nő?

c) Hány esetben lehet a díjazottak között három férfi?

**80.** Egy dobozban hat különböző tárgy van. Találomra kivesszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy egyet sem, vagy lehet mindet is). Hány különböző eset jöhet létre?

**81.** Egy dobozban 15 különböző tárgy van. Találomra kivesszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem). Hány különböző eset jöhet létre?

**82.** 12 cédulára írjuk fel rendre 1-től 12-ig a számokat. a) Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy egyenlő paritású számok ne kerüljenek egymás mellé? b) Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy az első hat helyen csak páros szám álljon? c) Hány különböző hetes csoport alkotható úgy, hogy a csoportban három páros szám társul négy páratlannal?

**83.** Hányféleképpen lehet hat tanuló között kilenc különböző tárgyat kiosztani úgy, hogy valamelyik tanuló hármat, valamelyik kettőt és a többi egy-egy tárgyat kapjon?

**84.** 200 csavar közül 20 selejtes. A 200 csavarból tízet kivéve, hány esetben lesz köztük:

a) legalább négy selejtes, b) legfeljebb négy selejtes, c) 20%-a selejtes?

**85.** Hányféleképpen helyezkedhet el 15 tanuló három darab ötszemélyes csónakban, ha egy-egy csónakon belül az elhelyezkedést figyelmen kívül hagyjuk?

**86.** Egy osztályból 15 tanuló kirándulni megy két napra. Az éjszakát egy turistaházban töltik, ahol három négyszemélyes és egy háromszemélyes szobát kapnak.

a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe?

b) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést is figyelembe vesszük?

**87.** A minden lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány két-, hány három-, hány négy-, hány öttalálatos szelvény van?

**88.** 150 darab készülék között öt darab hibás van. Hányféleképpen lehet húsz készüléket úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott készülékek között 0, 1, 4, 5 hibás legyen?

**89.** 200 csavar közül nyolc selejtes. Hányféleképpen választhatunk ki közülük öt csavart úgy, hogy

a) ne legyen köztük egyetlen selejtes csavar sem, b) egy selejtes és négy hibátlan legyen, c) két selejtes és három hibátlan legyen, d) mind az öt selejtes legyen?

- 90.** A lottón az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül húznak ki ötöt. Tekintsük az így keletkezett számötösöket. Ezek hány százalékában fordul elő egy rögzített szám?
- 91.** Egy kosárban 12 alma és 10 barack van. Jancsi kivesz vagy egy almát, vagy egy barackot, ezután Juliska választ egy almát és egy barackot is. Mikor van Juliskának több választási lehetősége, ha Jancsi almát vett, vagy ha barackot?
- 92.** Hányféleképpen állhat a tesitanár előtt kettesével egy oszlopban a 18 fiúból és 18 lányból álló osztály, ha két fiú és két lány nem kerülhet egymás mellé?
- 93.** A sportnapon a kötélhúzás versenyen egy osztályból egy ötfős fiú és egy ötfős leánycsapatot kell kiállítani. Hányféleképpen lehet megtenni ezt a mi osztályunkban?
- 94.** Határozzuk meg azoknak az ötjegyű számoknak a számát, amelyek legalább egy egyest tartalmaznak.
- 95.** Az iskolai metabajnokságra benevezett a 9. a osztály is. Hányféleképpen lehet összeállítani a tízfős csapatot úgy, hogy a) 3 lány és 7 fiú szerepeljen benne, b) 3 fiú és 7 lány szerepeljen benne, c) legalább egy fiú szerepeljen benne?
- 96.** Száz darab készüléknek a 12%-a hibás. Hányféleképpen lehet tíz készüléket úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott készülékek között a) ne legyen hibás, b) mind hibás legyen, c) pontosan öt hibás legyen, d) legalább egy hibás legyen?
- 97.** Egy lifthez 5 ember érkezik, de egyszerre csak 3 ember fér be. Hányféleképpen választhatjuk ki az első menet utasait?
- 98.** Húsz ember közül 3 fős bizottságot választanak, ahol van elnök, alelnök és titkár. Hányféleképpen tehető ez meg?
- 99.** Az 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből hány négyjegyű páros szám készíthető?
- 100.** Egy könyvtárban hét könyvet szemelünk ki, de csak hármat lehet kölcsönözni közülük. Hányféleképpen választható ki a három könyv?
- 101.** 15 emberből 5 tagú bizottságot választunk, ahol mindenkinek ugyanaz a rangja. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
- 102.** Egy könyvespolcon 7 különböző könyv van. Hányféleképpen tehetjük őket egymás mellé, ha egy két kötetes könyv kötetait egymás mellé szeretnénk helyezni?
- 103.** Egy úszóversenyen 8-an indulnak. Hányféleképpen alakulhat az első 3 dobogós sorrendje?
- 104.** Három férfi és három nő leül egy padra. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a férfiak és a nők felváltva szeretnének ülni?

### *Nehezebb feladatok*

- 105.** Egy  $2 \times 2 \times 2$  egységoldalú kockarácson egységnyi lépésekkel lépegetve el akarunk jutni valamelyik testátló egyik végpontjából a másik végpontba. Hányféleképpen tehetjük meg ezt, ha soha nem lépünk visszafelé?
- 106.** Hányféleképpen juthatunk el egy 10 fokból álló lépcső aljáról a tetejére, ha a lépcsőket ötletszerűen egyesével vagy kettesével vesszük?
- 107.** Hányféleképpen juthatunk el egy 10 fokból álló lépcső aljáról a tetejére, ha a lépcsőket ötletszerűen egyesével vagy kettesével vagy hármásával vesszük?
- 108.** Hányféleképpen juthatunk el egy 10 fokból álló lépcső aljáról a tetejére, ha menet közben pontosan két hármast lépünk, a többi lépésünk ötletszerűen egyes vagy kettes?
- 109.** Hány olyan hatjegyű különböző számjegyekből álló szám van, amelyben négy páratlan számjegy szerepel?
- 110.** Egy 34 fős szervezet 5-tagú vezetőséget választ: 1 titkárt és 4 vezetőségi tagot. Hányféle kimenetele lehet a választásnak? (A titkárt a vezetőségi tagoktól megkülönböztetjük, de a 4 vezetőségi tag között nem teszünk különbséget.)
- 111.** 32 lapos magyar kártyából kiválasztunk 10 lapot. Hányféleképpen fordulhat elő ilyen kiosztásban, hogy a 4 ász a 10 lap között legyen?
- 112.** Hány olyan hatjegyű szám létezik, amelyben van két azonos számjegy? És hány ilyen 15-jegyű szám létezik?
- 113.** Egy 12 fős csoportból 6 fős bizottságot választunk, de A és B nem lehetnek együtt a bizottságban. Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
- 114.** Hány ötszámjegyű, különböző számjegyekből álló, szigorúan növekvő szám van, amelynek utolsó számjegye páros?
- 115.** Egy sorban tíz diák ül. Hányféleképpen lehet öt diákot kiválasztani, ha pontosan két kiválasztott diák egymás mellett ül, a többiek nem?
- 116.** Egy 11 elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely a) legalább 3 elemű; b) páratlan elemszámú?
- 117.** A 32 lapos magyar kártyából osztunk 5 lapot. Hányféle leosztás van, amelyben van tők és van ász? (A magyar kártyában 8 db tők van, 4 db ász van, és a 4 ász egyike a tők ász.)
- 118.** Moziba megy 4 fiú és 3 lány. Hányféleképpen ülhetnek le 7 egymás melletti ülésre úgy, hogy semelyik két lány ne üljön egymás mellé?
- 119.** András, Barbara, Cili, Dezső, Edit és Feri moziba mennek. Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön?

**120.** Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint. Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül?

**121.** Hányféleképpen ülhet le 10 ember a) egy 6 fős és egy 4 fős padra; b) egy 6 fős és egy 4 fős kör alakú asztal köré? (Két leülést különbözőnek tekintünk, ha van olyan ember, akinek a jobb vagy a bal szomszédja más.)

**122.** Hány ötjegyű szám készíthető, amelynek minden számjegye különböző, és a) első számjegye kisebb, mint 4; b) szerepel benne az 1 és az 5 számjegy, és azok szomszédosak; c) szerepel benne az 1 és az 5 számjegy, de azok nem szomszédosak?

**123.** Egy 11 elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely a) legalább 3 elemű; b) páratlan elemszámú?

**124.** Egy részeg postás figyelmetlenül oszt szét öt levelet azok címzettjeinek. Hányféleképpen teheti ezt meg úgy, hogy senki se a sajátját kapja meg? És úgy, hogy pontosan 1, 2, 3, 4 ill. 5 címzett apja meg a saját levelét?

**125.** Legfeljebb hány pontban metszik egymást egy konvex 9-szög átlói?

**126.** Katonaságnál az őrszolgálati egységből egyszerre 4 ember áll őrségben. Hány tagból áll az őrszolgálati egység, ha az őrségre 1365-féleképpen lehet 4 őrt kiválasztani? (az érdektelen, hogy a 4 főből ki melyik sarkán áll a laktanyának)

**127.** Egy elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg úgy, hogy bármelyik kettő metszete nemüres halmaz legyen?

**128.** Hányféleképpen lehet hat tanuló között kilenc különböző tárgyat kiosztani úgy, hogy valamelyik tanuló hármat valamelyik kettőt és a többi egy-egy tárgyat kapjon?

**129.** Tizenegy tanuló három csónakot bérel egy kétülésest, egy négy ülésest és egy öt ülésest.

a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?

b) hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha két tanuló egy csónakba akar kerülni?

c) hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha öt tanuló szeretne egy csónakba kerülni?

(A csónakokon belüli elhelyezkedést sosem vesszük figyelembe.)

## VII. GEOMETRIA

### A háromszög magasságvonalai, súlyvonalai, középvonalai

#### I.

1. Fejezzük ki a következő alakzatok középvonalainak hosszát az alakzat oldalainak segítségével:  
a) háromszög;  
b) paralelogramma;  
c) trapéz (a szárak felezőpontját összekötő középvonal esetén).
2. Peti egy kartonból kivágott háromszöget a középvonalai mentén feldarabolt, így négy kisebb háromszöget kapott. A négy háromszög területét megmérte, majd az eredményeket összeadta, így összegként 57 cm-t kapott. Mekkora az eredeti háromszög területe?
3. Egy hegyesszögű háromszög két magasságvonala 200-os szögben metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögnek van  $20^\circ$ -os szöge.
4. Egy trapéz szarait összekötő középvonal hossza 15 cm. A trapéz két alapjának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 3. Számítsuk ki a trapéz alapjainak hosszát.
5. Bizonyítsuk be, hogy minden négyszög két szomszédos oldalának felezőpontjait összekötő szakasz hossza megegyezik az egyik átló felével.

#### II.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög alapú gesztenyetortát a csúcsoktól a súlypontig terjedő egyenes vágásokkal szétvágunk, akkor a kapott részek három testvér között igazságosan szétoszthatók, azaz mindegyik szelet alapterülete ugyanakkora.
7. Hogyan lehet egy háromszög alapú gesztenyetortát négy testvér között egyenes vágásokkal felosztani, ha azt akarjuk, hogy a testvérek által kapott szeletek pontosan ugyanolyan méretűek legyenek? Válaszunkat indokoljuk.
8. Igazoljuk, hogy minden négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak.
9. Húzzuk be egy trapéz szarait összekötő középvonalát és az egyik átlóját. Bizonyítsuk be, hogy az a két szakasz, amelyre az átló osztja a középvonalat, a trapéz két alapjának felével egyenlő. Az egyik rész az egyik alap felével, a másik rész a másik alap felével.
10. Egy derékszögű háromszög átfogója 25 cm, egyik középvonala 12 cm. Számítsuk ki a súlyvonalak hosszát.
11. Egy háromszög oldalai 1,2 cm, 2 cm, 1,6 cm. Mekkora területű háromszöget határoznak meg ezen háromszög középvonalai?

### III.

12. Vegyünk fel egy általános ABCD négyszöget és húzzuk be az átlóit. Az AB oldal felezőpontja P, a CD oldal felezőpontja R, az AC átló felezőpontja S, a BD átló felezőpontja T. Milyen tulajdonsággal, tulajdonságokkal rendelkezik a PSRT négyszög?
13. Milyen négyszöget alkotnak egy a) négyszög oldalfelező pontjai, b) egy rombusz oldalfelező pontjai, c) egy téglalap oldalfelező pontjai?
14. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex négyszög középvonalai felezi egymást.
15. Van-e a szabályos háromszögn kívül olyan háromszög, amelynek a három súlyvonala ugyanolyan hosszúságú?
16. A hegyesszögű ABC háromszög M magasságpontját tükrözzük az AB oldal F felezőpontjára, így kapjuk az M' pontot.  
a) Bizonyítsuk be, hogy az AM'BC négyszögben az A és B csúcsoknál  $90^\circ$ -os szög van.  
b) Bizonyítsuk be, hogy M' illeszkedik az ABC háromszög köré írt körére.
17. A III.38b) feladat eredményének felhasználásával lássuk be, hogy a háromszög súlyvonalaik négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegének háromnegyedszeresével.

### Kerületi és középponti szögek

18. Számítsuk ki a körcikk területét és a határoló körív hosszát, ha a sugár 8 cm, a középponti szöge pedig  $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $115^\circ$ ,  $150^\circ$
19. Mekkora az 5 cm sugarú körcikk középponti szögének mértéke fokban, illetve radiánban, ha a határoló körív hossza 5 cm, 8 cm, 12 cm, 25 cm?
20. Számítsuk ki a körcikk sugarát és középponti szögének mértékét fokban és radiánban, ha területe  $32 \text{ cm}^2$ , határoló körívének hossza 8 cm, 11, 7 cm,  $13,85 \text{ cm}$
21. Mekkora kerületi szög tartozik ahhoz a körívhez, amelyhez tartozó középponti szög nagysága  $16^\circ$ ,  $31^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $350^\circ$
22. Mekkora középponti szög tartozik ahhoz a körívhez, amelyhez tartozó kerületi szög nagysága  $10^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $175^\circ$
23. Mekkora középponti illetve kerületi szög tartozik ahhoz a körívhez, amelynek hossza a kör kerületének  $\frac{1}{3}$ -a,  $\frac{3}{5}$ -e,  $\frac{11}{12}$ -a, 50%-a, 75%-a?
24. Egy kör egy rögzített körívéhez tartozó középponti szög  $70^\circ$ -kal nagyobb, mint a rajta nyugvó kerületi szög. Számítsuk ki a köríven nyugvó középponti és kerületi szög nagyságát.
25. A kör egy rögzített ívéhez tartozó középponti és kerületi szög összege  $80^\circ$ . Számítsuk ki a középponti és kerületi szögeket.

26. A kört egy húrja két körszeletre bontja. A húr a kör középpontjából a)  $15^\circ$ , b)  $37^\circ$ , c)  $50^\circ$  szögben látszik. Mekkora szögben látszik a húr a kisebb körszeletet határoló körív pontjaiból?
27. Egy háromszög köré írható kör sugara 15 cm. A háromszög csúcsai a kört három olyan körívre bontják, amelyek, amelyek hosszának aránya 2:3:7. Számítsuk ki a háromszög szögeit, valamint a keletkező körívek hosszát.
28. Mekkora szögben látszik a háromszög köré írt kör középpontjából a háromszög  $\alpha$  szögével szemközti oldala?
29. Egy háromszög két oldala a köré írt kör középpontjából  $126^\circ$ -os, illetve  $68^\circ$ -os szögben látszik. Mekkora a háromszög szögei?
30. A kört egy húrja két ívre vágja. Az egyik ív pontjaiból a húr  $128^\circ$ -os szögben látszik Mekkora a másik ív pontjaiból a húr látószöge?
31. Egy pontból egy körhöz húzott két érintő  $67^\circ$ -os szöget zár be. Mekkora szögben látszik az érintési pontokat összekötő húr a kör pontjaiból?
32. Helyezzünk egy körben egy sugár hosszúságú húr. Mekkora szögben látszik ez a kör pontjaiból?
33. Mekkora az a kerületi szög, amelynek száraiból a kör egy-egy sugár hosszúságú szakaszt vág le?
34. Mekkora az a kerületi szög, amelynek egyik szára a kör sugara, másik a kör átmérője?
35. Rajzoljuk meg egy ABC háromszög A csúcsához tartozó szögfelezőt és hosszabbítsuk azt meg a köré írt körig. Így a P ponthoz jutunk. Bizonyítsuk be, hogy  $PB = PC$ .
36. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármely csúcsából kiindul szögfelező és ezen csúccsal szemközti oldal felezőmerőleges a köré írt körön metszik egymást.
37. Húzzuk be egy háromszög A és B csúcsaiból induló magasságvonalakat és hosszabbítsuk meg ezeket a köré írt körig. Legyen az így kapott két pont R és S. Lássuk be, hogy  $RC = SC$ .
38. Hosszabbítsuk meg a háromszög magasságvonalait a köré írt körig. Lássuk be, hogy ezen három pont által alkotott háromszög szögfelezői egybeesnek az eredeti háromszög magasságvonaláival.
39. a) Egy háromszög három szöge  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ . Rajzoljuk meg a háromszög csúcsaiban a köré írt kör érintőit. Számítsuk ki ezen érintők által meghatározott háromszög szögeit. b) Legyenek  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  egy hegyesszögű háromszög szögei. Rajzoljuk meg a háromszög csúcsaiban a köré írt kör érintőit. Fejezzük ki az érintők által meghatározott háromszög szögei  $\alpha$ -val,  $\beta$ -val,  $\gamma$ -val.
40. Egy háromszög szögei  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Mekkora annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt kör érintési pontjai határoznak meg?
41. Egy körhöz két pontjában érintőket húzunk. Mekkora szöget zárnak be az érintők, ha az érintési pontokat összekötő húr a kör középpontjából a)  $20^\circ$ , b)  $60^\circ$ , c)  $130^\circ$ -os szögben látszik?
42. A hegyesszögű ABC háromszög köré írt köréhez a háromszög csúcsaiban érintőket húzunk. Az érintőegyenesei által közrefogott háromszög két szöge  $70^\circ$  és  $84^\circ$ . Számítsuk ki az ABC háromszög szögeinek nagyságát.

## Látókörv, látószög

43. Írjunk kört egy egyenlő oldalú háromszög köré, és tűzzünk ki a kör területén egy pontot. Mekkora szögben látszanak ebből a pontból a háromszög oldalai?
44. Tűzzünk ki két jó kedvű pontot, A-t és B-t és adjunk meg egy  $\alpha$  szöget és egy  $e$  egyenest. Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből az AB szakasz  $\alpha$  szögben látszik.
45. Tűzzünk ki két biztos pontot (A, B) és vegyünk fel egy kört. Szerkesszük e körön olyan pontot, amelyből az AB szakasz 30 fokos szögben látszik.
46. Egy szög egyik szárán tűzzünk ki egy  $c$  szakaszt, a másikon egy  $b$  szakaszt, továbbá vegyünk fel egy  $\gamma$  és egy  $\beta$  szöget. Szerkesszünk olyan pontot, amelyből a  $c$  szakasz  $\gamma$ , a  $b$  szakasz  $\beta$  szögben látszik.
47. Egy négyzet belsejében hogyan lehet egy olyan pontot szerkeszteni, amelyből két szomszédos oldal egyike  $90^\circ$ -os, másika  $120^\circ$ -os szögben látszik?
48. Tűzzünk ki egy szakaszt és vegyünk fel egy a szakaszra merőleges és a szakaszt nem metsző egyenest. Szerkesszük meg az egyenesen azt a pontot, amelyből a szakasz a legnagyobb szögben látszik.
49. Hogyan lehet azt a háromszöget megszerkeszteni, amelynek az  $a$  oldala 7 cm, az ezzel szemközti szöge  $45^\circ$ , és az  $a$  oldalhoz tartozó magassága 4 cm?
50. Hogyan lehet azt a háromszöget megszerkeszteni, amelynek az  $a$  oldala 7 cm, az ezzel szemközti szöge  $45^\circ$ , és az  $a$  oldalhoz tartozó súlyvonala 5 cm?
51. Hogyan lehet megszerkeszteni azt a paralelogrammát, amelynek a két átlója 6 cm és 8 cm, továbbá az egyik szöge  $60^\circ$ ?
52. Hogyan lehet azt a háromszöget megszerkeszteni, amelynek az  $a$  oldala 8 cm, a  $b$  oldalhoz tartozó súlyvonala 5 cm, és tudjuk, hogy ez a súlyvonal a  $b$  oldallal  $45^\circ$ -os szöget zár be?
53. Szerkesszünk négyszöget a következő öt adatból: két átlója, két szomszédos oldala és a másik két oldal által bezárt szög. Csak a szerkesztés menetét kell leírni vázlatrajz kíséretében.
54. Szerkesszünk egy előre felvett háromszögben egy olyan pontot, amelyből mindhárom oldal ugyanakkora szögben látszik.  
(Segítség: mekkora ez a szög?)
55. Vegyünk fel egy szakaszt. Szerkesszük meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekből a szakasz a)  $75^\circ$ -os, b)  $135^\circ$ -os, c)  $150^\circ$ -os szögben látszik.
56. Vegyünk fel egy négyzetet. Hogyan lehet megszerkeszteni azokat a pontokat, amelyekből a négyzet két szemközti oldala  $60^\circ$ -os szögben látszik?

## Húrnégyszögek

**57.** Húzzuk meg egy háromszög három magasságvonalát. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, egyik csúcsa és az ebből a csúcsból induló oldalakon levő magasságtalppontok egy körön vannak.

(Segítség: mit volna elég belátni?)

**58.** Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög egy belső pontjából az oldalakra állított merőleges szakaszok a háromszöget három húrnégyszögre bontják.

**59.** Egy kör AB átmérőjének B-n túl levő meghosszabbítására C pontjában állítsunk merőleget. Ezt a merőleget D pontban és a kört E pontban metszi egy A-ból húzott másik egyenes. Bizonyítsuk be, hogy BCDE négyszög húrnégyszög.

**60.** Húzzunk két jelentősen különböző sugarú egymást metsző kör metszéspontjain át egy-egy szelőt. Ezek mindkét kört még egy pontban metszik. Kössük össze az ugyanabban a körben levő második metszéspontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert két egyenes párhuzamos.

(Segítség: kössük össze a két kör metszéspontjait egy szakasszal. Mit kaptunk? Arról mit tudunk? Azt hogyan használhatnánk fel?)

**61.** Előfordulhat-e, hogy egy húrnégyszögben a szögek úgy aránylanak egymáshoz, mint a) 3:5:4:4, b) 2:5:4:4?

**62.** Egy húrnégyszögnek egy körüljárási irány szerinti szögeinek aránya  
a) 3:2:3:4, b) 3:2:9:10, c) 5:20:31:16. Számítsuk ki a négyszög szögeit.

**63.** Mekkora annak a húrnégyszögnek a szögei, amelynek két külső szögének nagysága  
a)  $35^\circ$ ,  $120^\circ$ , b)  $70^\circ$ ,  $65^\circ$ , c)  $85^\circ$ ,  $155^\circ$ .

**64.** Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög bármely belső szöge ugyanakkor, mint a szemközti külső szöge.

**65.** Lássuk be, hogy a húrnégyszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást.

**66.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két csúcsa, és a belőlük kiinduló magasságvonalak talppontjai húrnégyszöget alkotnak.

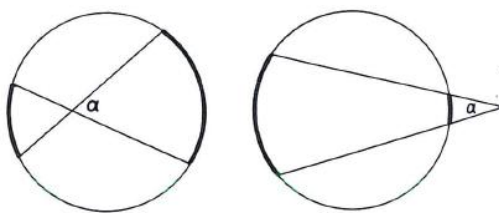
**67.** Szerkesszünk húrnégyszöget, ha adott három oldala 3 cm, 4 cm, 4,5 cm, és két ismert oldal által bezárt szög.

## Érintőnégszögek

68. Vegyünk fel egy  $c$  szakaszt, és ezen szemeljünk ki egy pontot, legyen ez  $E$ . Vegyünk fel továbbá egy  $r$  távolságot. Szerkesszünk háromszöget, amelynek egyik oldala  $c$ , az  $r$  sugarú beírt köre  $E$ -ben érinti a  $c$  oldalt.
69. Szerkesszünk egy adott körhöz egy adott külső pontból érintőt.
70. Adjunk meg egy  $e$  egyenest és vegyünk fel egy  $k$  kört. Szerkesszünk a  $k$  körhöz az  $e$  egyenessel párhuzamos érintőt.
71. Vegyünk fel egy szöget és egy  $r$  szakaszt. Szerkesszünk  $r$  sugarú kört, amely érinti a szög két szárát.
72. Hogyan lehet érintőnégszöget szerkeszteni, ha adott a beírt kör sugara, a két oldala és e két oldal által közbezárt szög?
73. Vegyünk fel három szakaszt ( $a$ ,  $b$ ,  $r$ ) és egy  $\alpha$  szöget. Szerkesszük meg azt az érintőnégszöget, amelynek két szomszédos oldala  $a$  és  $b$ , az általuk bezárt szög  $\alpha$ , és a beírt kör sugara  $r$ .
74. Vegyünk fel három szöget ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) és egy  $r$  szakaszt. Szerkesszük meg azt az érintőnégszöget, amelynek  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  szögei vannak és a beírt körének sugara  $r$ .

## Vegyes feladatok

75. Az ábrán a vastagon kihúzott ívekhez tartozó kerületi szögek nincsenek bejelölve. Legyenek ezek  $\beta$  és  $\gamma$ . Fejezzük ki  $\alpha$ -t  $\beta$ -val és  $\gamma$ -val.



76. Legyen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  egy hegyesszögű háromszög három szöge. Mekkora szöget zár be a háromszög köré írt köréhez az  $\alpha$  csúcsában rajzolt érintő a szemközti oldal egyenesével?
77. Szerkesszünk háromszöget, ha az egyik oldala 5 cm, az ezzel szemközti szöge  $60^\circ$  és háromszög köré írt kör sugara 4,5 cm.
78. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos sokszög AB oldala a csúcsokból (kivéve A-t és B-t) ugyanakkora szögben látszanak.
79. Egy szabályos sokszög egyik oldala a köré írt kört két ívre bontja. Mekkora szög alatt látszik a kisebb körív pontjaiból a sokszög oldala? Az oldalak száma a) 5, b) 6, c) 12, d)  $n$ .

## Nehezebb feladatok

**80.** Egy színház felülnézete látható az ábrán. Tegyük fel, hogy a téglalap két hosszabb oldala mentén végig oldalpáholyok vannak. Hogyan tudnánk megszerkszteni az az oldalpáholyt, azaz a téglalap hosszabb oldalának azt a pontját, amelyből a legnagyobb szög alatt látszik a színpad.

(Segítség: rajzoljuk be a színpad különböző szögű látóköríveit.)



**81.** Vegyünk fel két szöget ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) és egy kört. Szerkesszünk a körbe egy háromszöget, amelynek két szöge  $\alpha$  és  $\beta$ .

**82.** Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egyenlő szárú háromszöget határoz meg. A háromszög egyik csúcsából húzott szögfelező, a körhöz ugyanabban a csúcsban húzott érintő és a csúccsal szemközti oldal egyenese.

**83.** Igazoljuk, hogy minden négyszög szögfelezői húrnégyszöget zárnak közre.

**84.** Rajzoljunk érintőt a háromszög köré írt köréhez az egyik csúcsában és messük el a csúcsához tartozó két oldalt egy ezzel az érintővel párhuzamos egyenessel. Mutassuk meg, hogy a háromszögből így lemetezett négyszög húrnégyszög.

**85.** Két jelentősen különböző sugarú érintkező kör érintési pontját át húzzunk egy szelőt. Ez mindkét körből kimetsz egy húrt. Bizonyítsuk be, hogy mindkét húrhoz ugyanakkora középponti szög tartozik.

**86.** Két jelentősen különböző sugarú metsző kör egyik metszéspontján át húzzunk egy tetszőleges egyenest. Mutassuk meg, hogy ennek az egyenesnek a körökön belül fekvő darabja a két kör másik metszéspontjából mindig ugyanakkora szögben látszik, akárhogy is húzzuk meg az egyenest.

## VIII. FELADATGYŰJTEMÉNY

### Oszthatóság, prímszámok

1. Van-e olyan  $p$  prímszám, amelyre  $2025 \cdot p + 1$  kifejezés értéke is prímszám?
2. Igaz-e, hogy minden 3-nál nagyobb egész szám előállítható prímszámok összegeként?
3. Egy apának és két különböző korú kisgyermekének életkora ugyanazon prímszám hatványai. Egy évvel ezelőtt mindhármuk életkora prímszám volt. Hány éves volt akkor a legkisebb gyerek?
4. Három testvér közül a legidősebb 14 évvel idősebb a legfiatalabbnál, a középső testvér pedig 4 évvel fiatalabb a legidősebbnél. Mindhármuk életkora prímszám. Hány évesek?
5. Bizonyítsd be, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímek összege osztható 12-vel.
6. Hány olyan prímszám van 100 és 300 között, amelyben a számjegyek összege 15?
7. Hány olyan prímszám van 100 és 300 között, amelyben a számjegyek szorzata 15?
8. Hány olyan  $x$  egész szám van, amelyre az  $x - 40, x - 50, x - 60$  számok mindegyike prím?
9. Az első 100 prímszám reciprokának összege miért nem lehet egész szám?
10. a) Hány olyan pozitív egész szám van 120-ig, amely 2-vel vagy 3-mal osztható?  
b) Hány olyan pozitív egész szám van 1000-ig, amely sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható?
11. Hány olyan pozitív egész szám van 120-ig, amely 2-vel vagy 3-mal osztható?
12. Az 1, 2, 3, ..., 1000 számok között hány olyan van, amely sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható?
13. Hány olyan 120-nál kisebb pozitív egész szám van, amely nem osztható a 2, 3, és 5 prímek egyikével sem?
14. Hány olyan természetes szám van, amely osztója  
a) a 30 és 72 számok valamelyikének,  
b) a  $10^{40}$  és a  $20^{30}$  számok valamelyikének?
15. Hány olyan négyjegyű természetes szám van, amelynek számjegyei között van prímszám és négyzetszám is?
16. Mi a  $2015^{2015} + 2015^{2016}$  összeg utolsó 6 számjegye?
17. Az  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  halmaznak hány olyan kételemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege osztható 3-mal?
18. Melyik 15-nek az a legkisebb pozitív többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csak a 0 és a 7 számjegyeket tartalmazza?

19. Az  $N$  pozitív egész szám pozitív osztóinak a szorzata  $3^{595}$ . Határozzuk meg az  $N$  szám utolsó számjegyét.
20. Hány olyan hatjegyű természetes szám van, amelynek 2011-gyel való osztási maradéka 2010?
21. Adjuk meg az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogyha az  $n$ ,  $n+4$ ,  $n+8$  számok pozitív osztóinak számát összeadjuk, hatot kapunk eredményül. (Például  $n=10$  esetén a 10, 14, 18 számhármasnál az osztó számának összege  $4+4+6=14$ .)

## Algebra

22. Az  $x$  és  $y$  pozitív egészekre  $xy + x + y = 34$ . Határozzuk meg  $x + y$  értékét.
23. Miért nem lehet az  $ab(a + b) = 2023$  egyenletet megoldani az egész számok körében?
24. Miért nem lehet a  $2022^x + 2023^x = 2024^z$  egyenletet megoldani a pozitív egész számok körében?
25. Szét lehet-e osztani két csoportba öt egymást követő egész számot úgy, hogy a két csoportban levő számok szorzata ugyanannyi legyen?
26. Melyik az a háromjegyű tízes számrendszerbeli szám, amely ötszöröse a számjegyei szorzatának?
27. Határozd meg azt a különböző jegyekből álló legkisebb hatjegyű számot, amely osztható 11-gyel.
28. Három különböző életkorú matematikus észrevette, hogy ha egyikük életkorához hozzáadjuk a másik kettő átlagéletkorát, akkor a 65, 69, 76 számokat kapják. Mennyi a három matematikus átlagéletkora?
29. Egy sorozat első tagja 4, a hatodik tagja pedig 47. Bármelyik tag (a harmadiktól kezdve) megegyezik az adott tag előtt álló két tag összegével. Mennyi lesz a sorozat harmadik tagja?
30. Egy 10 méter hosszú előre haladó gyereksor végéről a kísérőjük a sor elejére ment, majd amikor odaért, visszafordult és ismét a sor végére ment. A kísérő háromszor olyan gyorsan haladt, mint a gyerekek. Mekkora utat tettek meg a gyerekek, mire a kísérő ismét a sor végére ért?
31. Alakítsd szorzattá:  $ab + a - b - 1$        $ab + 2a + 3b + 6$        $ab - 2a + 3b - 6$
32. Hány megoldása van az egyenletnek a pozitív egészek körében?  
 $ab + 2a + 3b = 38$        $\frac{1}{1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{7}$        $\frac{1}{1} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} = \frac{1}{7}$
33. Egy külön festő csak olyan téglalap alakú vásznon hajlandó dolgozni, amelynek területe annyi négyzetméter, ahány méter a kerülete. Hányféle vásznat tud használni?
34. A  $b$  és  $c$  pozitív egészekre  $b^2 - bc = 23$ . Mennyi a  $c$  értéke?
35. Miért nem lehet megoldani az egész számok körében az  $a^2 - 3b = 17$  egyenletet?
36. Miért nem négyzetszám a 2, 3, 4, 6, 7, 8 számjegyek valamilyen sorrendjében felírt hatjegyű szám?

39. Leírtuk sorban egymás mellé a pozitív egész számokat 1-től 2023-ig. Az így kapott tízes számrendszerbeli szám négyzetszám vagy sem?

40. Milyen számjegyre végződik az  $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 9!$  szám?

41. Megoldható-e az egész számok körében az  $ab(a - b) = 13013$  egyenlet?

42. Megoldható-e az egész számok körében az  $18x - 15y = 10$  egyenlet?

43. Alakítsd szorzattá:  $ab + a - b - 1$        $ab + 2a + 3b + 6$        $ab - 2a + 3b - 6$

44. Lássuk be, hogy minden  $a$  és  $b$  esetén teljesül, hogy  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

45. Lássuk be, hogy minden  $a$  és  $b$  és  $c$  és  $d$  esetén teljesül, hogy  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2ab + 2cd$

46. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

$$y \geq x + 4 \quad xy > 0 \quad y - 2 - 4x < 0 \quad x^2 + y^2 = 0 \quad |y| = |x|$$

$$y + 4 \leq |x| \quad (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 0 \quad (y - 2)(x + 3) > 0 \quad |y| = x$$

Oldjuk meg az egyenleteket (47–55.)

47.  $(x + 3)^2 + 2 = 1 - \sqrt{y}$

48.  $(x - 1)^2 + 1 = \frac{1}{1+y^2}$

49.  $(x + 7)^2 + 4 = \frac{2}{1+(z+5)^2}$

50.  $\sqrt{3-x} = 4$

51.  $\sqrt{3-x} = x - 5$

52.  $16.(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$

53.  $17. x^2 + y^2 = 4x - 10y - 29$

54.  $18. x^2 + y^2 = 10x + 14y - 74$

55.  $a^2 + b^2 + c^2 + 14a - 2b - 4c = -54$

56.  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ . Lássuk be, hogy  $a = b = c$ .

57.  $(a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$  Lássuk be, hogy  $a = b = c$ .

58. Lássuk be:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a - 4b - 6c - 14$

59. Lássuk be:  $2a^2 + c^2 \geq 2ab - 2ac$

60. Lássuk be:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Oldjuk meg a egyenleteket (61–64.)

61.  $\left| \left| \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right| = 0$

62.  $|x - 3| = \frac{1}{2}x + 4$

63.  $|x + 5| = -2x + 3$

64.  $|2 - |1 - x|| = 1$

65. Ha egy szám reciprokát, ellentettjét és abszolút értékét összeadjuk, ugyanazt a számot kapjuk, mintha ezt a három számot összeszoroztuk volna. Mennyi volt az eredeti szám négyzete?

66. Oldjuk meg az egész számok halmazán:  $\left| \left| |x - 1| + 1 \right| - 1 \right| + 1 = 2004$

67.  $\left| |x - 1| - 1 \right| = x - 2$

68. Oldjuk meg a valós számok halmazán:  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \frac{x+1}{x-1}$

69. Oldjuk meg a valós számok halmazán:  $\left| \frac{x+1}{x} \right| > p$

70. Ábrázoljuk: a)  $y = 3[x] - 4$     b)  $y = -\{x - 4\}$     c)  $y = |-[x - 1]|$

71. Oldjuk meg:  $||[x]| = [|x]|$

72. Oldjuk meg a valós számok halmazán:  $|1 + |x + 1|| = x - [x]$

73. Oldjuk meg a valós számok halmazán:  $8 \cdot \left[ \frac{x}{4} \right] = |x + 4|$

74. Az  $a, b$  pozitív valós számokra az  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $ab$  és  $\frac{a}{b}$  kifejezések értéke növekvő sorrendben  $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}$ . Melyik ez a két szám?

75. Egy medencét három csapon keresztül lehet feltölteni. Az 1. és a 2. csap 6 óra alatt, a 2. és 3. csap 4 óra alatt, az 1. és 3. csap 3 óra alatt tölti fel a medencét. Mennyi idő alatt töltik fel a medencét az egyes csapok külön-külön?

76. Az  $a$  és  $b$  nullától különböző valós számokra teljesül a következő összefüggés:  
 $a^3 + (3b^2 + 1)b + (3b^2 + 1)a + b^3 = 0$  Mennyi lehet az  $\frac{a}{b}$  hányados értéke?

77. Mely  $x$  és  $y$  pozitív egész számokra igaz az egyenlőség?  
$$x^2 - y^2 + 2x - 6y - 25 = 0$$

78. Oldjuk meg a valós számok halmazán az  $\left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{2x}{3} \right] = x$  egyenletet, ahol  $[x]$  a legnagyobb egész számot jelenti, amely még nem nagyobb, mint  $x$ .

## Kombinatorika

79. Hány olyan négyjegyű szám van, amelynek jegyei között az 1 és 2 számjegyek között legalább az egyik szerepel?
80. Hány ötjegyű palindrom szám van?
81. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege páros?
82. Egy osztály tanulói három túrát terveztek. Mindegyiken 15 diák vett részt. Az első túra résztvevői közül heten mentek el a másodikra, nyolcan a harmadikra. A második túra öt résztvevője vett részt a harmadikon. Négy diák volt, aki háromszor túrázott. Hány tanuló volt jelen a három túrának legalább az egyikén?
83. Egy 30 fős osztály tanulói három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Minden diák legalább egy nyelvet tanul: angolt 14-en, németet 15-en, franciát 11-en, pontosan két nyelvet 6-an. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?
84. Egy versenyen négy feladatot tűztek ki. Az 50 versenyző közül az első feladatot 44-en, a másodikat 41-en, a harmadikat 36-an, a negyediket 29-en oldották meg. Hányan oldották meg a harmadik és negyedik feladatot is, ha nem volt olyan, aki mindegyiket megoldotta?
85. Egy 30 fős osztály tanulói három nyelvet tanulnak, angolt, németet, franciát. Minden diák legalább egy nyelvet tanul: angolt 14-en, németet 15-en, franciát 11-en, pontosan két nyelvet pedig 6-an. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?
86. Egy matematikaversenyen három feladatot tűztek ki. A versenyen elinduló 27 versenyző közül az első feladatot 22-en, a másodikat 18-an, a harmadikat 14-en oldották meg. Hányan oldották meg a második és harmadik feladatot is, ha mindhárom feladatot senki sem oldotta meg?
87. Az iskolai büfé előtt sorban állnak Juci, Viktor, Anna, Dóri, Ádám. Hányféleképpen állhatnak sorba?
88. Egy körforgalomban 4 autó halad egymás után, egy Opel, egy Ford, egy Audi és egy Renault. Hányféle sorrendben haladhatnak?
89. Hány különböző úton juthatunk el a 8x8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha minden alkalommal egyet lépünk vagy jobbra, vagy felfelé?
90. Hány 5-tel osztható ötjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha, minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
91. Hány háromjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4-es számkártyákból, ha mindegyikből egy-egy darab van?
92. Egy versenyen 42-en indulnak. Az újságok csak az első hat helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?
93. Egy fagyaltárusnál ötféle fagyalt van. Valaki szeretne egy kétgombócos fagyaltot venni. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha tölcserbe kéri a) a két gombóc különböző, és a sorrendjük is számít? b) a két gombóc lehet egyforma is?

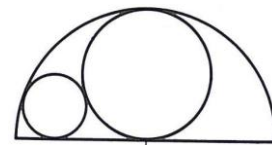
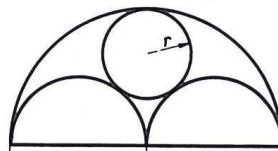
- 94.** Hány különböző terméket lehet egy kilencjegyű, 0 és 1 számjegyekből álló kóddal megkülönböztetni, ha abban megállapodtak, hogy az első jegy csak 1-es lehet?
- 95.** A 8, 2, 6, 3, 4 számjegyekkel négyjegyű számokat írunk fel úgy, hogy minden számjegyet többször is felhasználhatunk. Hány különböző számot tudunk felírni?
- 96.** Hány darab páratlan, pontosan ötjegyű szám van a tízes számrendszerben?
- 97.** Hány 5-tel osztható négyjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet? Írjuk fel ezeket.
- 98.** Egy kétválasztásos (igen-nem) teszten 10 kérdést tettek fel. Hányféleképpen lehetséges 8 helyes választ adni?
- 99.** Az iskolai büfében már csak nyolc különböző sütemény van. Hányféleképp választhat ki ezek közül magának ötöt Alex?
- 100.** Nyolc labdarúgó csapat egyfordulós körmérkőzést játszott egymással. Átlagosan hány gól esett egy mérkőzésen, ha összesen 120 gólt rúgtak?
- 101.** A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány 5 elemű részhalmaza van?
- 102.** Egy hétszemélyes társaságban mindenki, mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás ez összesen?
- 103.** Hány egyenest határoznak meg a szabályos tizenkétszög csúcspontjai?
- 104.** A 200 m-es mellúszás döntőjében nyolcan indulnak.  
a) Hányféle beérkezési sorrend lehetséges?  
b) Hányféle dobogós sorrend lehetséges?
- 105.** Évvégén a 28 fős osztályban három jutalmat ad át az osztályfőnök. Hányféle jutalmazás lehetséges, ha egy diák  
a) csak egyet kaphat a 3 különböző könyv közül?  
b) többet is kaphat a 3 különböző könyv közül?  
c) csak egyet kaphat a 3 egyforma könyv közül?
- 106.** Hányféleképpen helyezkedhet el 10 házaspár egy sorban úgy, hogy a férjek a feleségük mellé kerülnek?
- 107.** Egy szabályos játékkockát hatszor egymás után feldobunk. A kapott eredményeket rendre egymás mellé írjuk. a) Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek? b) Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike előfordul?
- 108.** Egy diáknak öt egymást követő tanítási napon matematika, angol, biológia és fizika tantárgyakból kell dolgozatot írnia ebben a sorrendben úgy, hogy egy napon legfeljebb két dolgozatot írhat. Hányféleképpen oszthatják el a diák dolgozatait az öt napon? (A dolgozatok egy-egy napon belüli konkrét időpontjai nem számítanak.)

## Geometria

- 109.** Az ABCD téglalap A csúcsából húzott, az AB oldallal  $60^\circ$ -os szöget bezáró egyenes a BC oldal B-n túli meghosszabbítását az E pontban metszi. Az EDC szög  $30^\circ$ -os, a BC oldal hossza 12. Milyen hosszú az EC szakasz?
- 110.** Megrajzoltuk egy téglalap egyik átlójának felező merőlegesét, ez a téglalap egyik oldalát 1:2 arányban osztja. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?
- 111.** Az ABCDEF szabályos hatszög AB oldalegyenesének AB-n kívüli G pontjára  $\angle AGE = 45^\circ$ . Mekkora az  $\angle AGC$  szög?
- 112.** Az ABC háromszögben  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\angle CAB = 45^\circ$ , továbbá M a BC oldal felezőpontja. Határozd meg az  $\angle AMB$  szög nagyságát.
- 113.** Egy hatszög szögei egyenlők. Az oldalak hossza körüljárás szerint 7, 15, 14, 4, 18, x. Mekkora az x?
- 114.** Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja E, a CB oldal egyik pontja G, és AG felezi a CE szakaszt, továbbá CE merőleges az AG szakaszra. Mekkora az AC oldal, ha  $AB = 28$  és  $BC = 24$ ?
- 115.** Az ABC háromszögben  $AB = AC$ . Az AB oldal egyenesének B-n túli meghosszabbításán fekszik a D pont úgy, hogy  $AB = BD$ . Az AB oldal felezőpontja E. Bizonyítsuk be, hogy  $CD = 2 \cdot CE$ .
- 116.** Egy húrtrapézt az egyik átlója két egyenlő szárú háromszögre bontja. Számítsuk ki a trapéz szögeit.
- 117.** Egy húrtrapéz magassága 10, az átlói merőlegesek egymásra. Mekkora a területe?
- 118.** Egy derékszögű trapéz egyik alapja és hosszabbik szára 4 egység. A 4 egység hosszú szakaszon fekvő derékszögű csúcsból induló átló  $30^\circ$ -os szöget zár be az ugyanebből a csúcsból induló szárral. Mekkora a trapéz középvonala?
- 119.** Adott két négyzet. Mindenféle mérés nélkül szerkesszünk egy olyan négyzetet, amelynek a területe a két négyzet területének a különbsége.
- 120.** Számoljuk ki a téglatest testátlóját, ha az élek hossza 3, 4, 12.
- 121.** Az ABCD téglalap belsejében felvettünk egy P pontot.  
Mutasd meg hogy  $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ .
- 122.** Miért nem lehet olyan háromszöget készíteni, amelynek két oldala 8 és 13 cm, és a hozzájuk tartozó magasságok 8 és 5 cm hosszúak?

**123.** Számítsd ki a kis kör sugarát,  $r$ -et a bal oldali ábrán, ha a legnagyobb félkör sugara 12.

**124.** Számítsd ki a legkiseb kör sugarát a jobb oldali ábrán, ha a félkör sugara 12.



**125.** Mutassuk meg, hogy a háromszög oldalfelező pontjai alkotta háromszög magasságpontja az eredeti háromszög köré írt kör középpontjával esik egybe.

**126.** Mutassuk meg hogy egy háromszög oldalai mint átmérők fölé szerkesztett körök közös húregyenesei egy közös ponton mennek át.

**127.** Egy kör valamely húrának egyik végpontját kössük össze a kör középpontjával. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott sugár Thalész köre felezi a hűrt.

**128.** Igazoljuk, hogy a hozzá írt körök középpontjai által meghatározott háromszög magasságvonalai az eredeti háromszög szögfelezői.

**129.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy hozzá írt köre a meghosszabbított oldalakat azok metszéspontjából félkerület távolságra érinti.

**130.** Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma csúcaiból az átlók a emelt merőlegesek talppontjai egy paralelogramma csúcsai.

**131.** Mutassuk meg, hogy egy kör átmérőjének végpontjai téglalapot határoznak meg.

**132.** Bizonyítsuk be, hogy a rombusz oldalfelező pontjai téglalap csúcsai.

**133.** Egy egyenlő szárú trapéz hegyes szögei  $45^\circ$ -osak hosszabbik alapja 10 cm, magassága 2 cm. Mekkora a rövidebb alap?

**134.** Egy trapéz rövidebb alapja  $c$ . Az átlók a középvonalat három egyenlő részre bontják. Mekkora a másik alap?

**135.** Egy hegyesszögű háromszöget 2 magasságvonala 4 részre bontja. Tudjuk, hogy ebből a 4 részből 2-2-nek egyenlő a területe. Mekkora a háromszög szögei?

**136.** Egy  $e$  egyenesen felvesszük az  $A, B, C$  pontokat úgy, hogy  $AB = 2$ ,  $BC = 6$  és a  $B$  pont az  $AC$  szakasz belső pontja. Az  $e$  egyenes azonos partján az  $AC$  és  $BC$  szakaszokra olyan  $ACE$  és  $BCF$  háromszögeket rajzolunk, melyekre  $AE = 6$  és  $CE = 7$ , illetve  $BF = 8$  és  $CF = 7$ . Legyen  $D$  a  $BF$  és a  $CE$  szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg az  $ABDE$  négyszög és a  $CDF$  háromszög területének arányát!

**137.** Egy kört az  $AB$  átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiken kijelöljük a  $C$  és  $D$  pontokat. Legyen az  $AC$  és  $BD$  egyenesek metszéspontja  $P$ , az  $AD$  és  $BC$  egyeneseké pedig  $Q$ . Mekkora szöget zár be a  $PQ$  egyenes az  $AB$  átmérővel?

**138.** Egy trapézáról tudjuk, hogy az egyik belső szöge derékszög és két külső szögének aránya  $4 : 5$ . Mekkora lehet a trapéz legkisebb belső szöge?

- 139.** Milyen arányban osztják az ABCDEF szabályos hatszög AC és BF átlói egymást?
- 140.** Az ABCDEF f hatszögre igaz, hogy minden szöge  $120^\circ$ , AB oldala 2 cm, BC oldala 7 cm, CD oldala 3 cm, és  $DE = 4$  cm. Milyen hosszúak az EF és az FA oldalak?
- 141.** Az ABC háromszög AB oldal a 26 cm. Az A csúcsból induló súlyvonal 18 cm, a C csúcsból induló súlyvonal 15 cm. Mekkora a háromszög területe?
- 142.** Egy szög csúcsa az A pont, szárai  $s_1$  és  $s_2$ . Felvesszük a  $s_1$  szög szárán a B, C, az  $s_2$  szárán a D, E pontokat úgy, hogy  $AB=BC=DC=EA$ . Hány fokok a szög?

### Vegyes feladatok

- 143.** Miért nem lesz 6-tal osztható 6 egymást követő egész szám összege?
- 144.** Egy kör alakú asztalnál tizenegyen ülnek. Mindenki gondol egy egész számra, majd mindenki felírja egy cédulára két szomszédja számának összegét. Bizonyítsd be, hogy nem állhat minden cédulán 2023.
- 145.** Késő este egy autóbuszon heten utaztak, mindenki a végállomáson szállt le. A játékos kedvű sofőr mindegyik utastól megkérdezte, hány embert ismer utastársai közül. A következő válaszokat kapta: 1, 2, 3, 6, 5, 3 1. A sofőr rövid gondolkodás után rájött, hogy valaki nem mondott igazat. Hogyan okoskodott a sofőr? Az ismeretség kölcsönös.
- 146.** Hány négyzetszám osztója van a 7200-nak?
- 147.** Egy családban az volt a szokás, hogy a tanév végén a három testvér mindegyike apjától annyi könyvet kapott ajándékba, ahány éve iskolába jár. Bizonyos idő alatt összesen 25 könyvük gyűlt össze. Hányadik osztályt fejezték be akkor a testvérek?
- 148.** Egy távoli szigeten a felnőtt nők és férfiak közül néhányan házasságban élnek egymással. A férfiak kétharmada nő és a nők háromötöde férjezett. A felnőtt szigetlakók hányad része él házasságban?
- 149.** Mennyi ez?  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$
- 150.** Oldd meg az egyenletet anélkül, hogy a két oldallal a hagyományos műveletek bármelyikét elvégeznéd:  $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6} = 5$
- 151.** Hány jegyű a  $25^{16} \cdot 2^{38}$  szorzat?
- 152.** Melyik nagyobb?  $2^{300}$  vagy  $3^{200}$
- 153.** Melyik nagyobb?  $31^{11}$  vagy  $17^{14}$
- 154.** Hány olyan egész szám van, amelyre a  $\frac{6}{n-3}$  tört értéke egész szám?
- 155.** Melyek azok az egész számok, amelyekre a  $\frac{x+3}{x-3}$  tört értéke is egész szám?

156. Miért nem négyzetszám a  $10^{10} + 2$  szám?

157. Miért nem négyzetszám a  $2022^{15} + 2$  szám?

158. Melyik szám nagyobb?  $3^{21}$  vagy  $2^{31}$

159. Adottak az  $1 - x$ ,  $2 - x$ ,  $3 - x$ , ...,  $100 - x$  kifejezések.

a) Számoljuk ki a szorzatukat, ha  $x = 77$

b) Számoljuk ki az összegüket, ha  $x = 50,50$

c) Mutassuk meg, hogy a szorzatuk  $x = 0$ -ra és  $x = 101$ -ra ugyanaz.

160. Számítsuk ki a következő összeget:  $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots - 2^2 + 1^2$

161. a) Hozzuk a legegyszerűbb alakra:  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

b) Számítsuk ki a következő összeget:  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$

162. Számítsuk ki a következő összeget:  $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots - 2^2 + 1^2$

163. Számítsuk ki a következő összeget:  $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$

164. a) Bizonyítsuk be, hogy az 1, 2, ..., 100 számok közül kiválasztható 50 db úgy, hogy a kiválasztottak szorzata négyzetszám legyen. b) Bizonyítsuk be, hogy az 1, 2, ..., 2010 számok közül kiválasztható 1005 úgy, hogy a kiválasztottak szorzata négyzetszám legyen.

165. Tekintsük az első 30 pozitív egész szám összegét, majd tetszőleges számú tag előjelét változtassuk meg. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy a kapott összeg 300 legyen?

166. Egy  $4 \times 4$ -es táblázat mindegyik mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét.

a) Elérhető-e így, hogy minden sorban és minden oszlopban különbözzön a számok összege?

b) Elérhető-e így, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban különbözzön a számok összege?

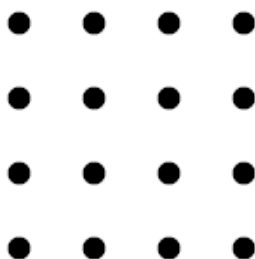
167. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek bármely két szomszédos jegye különböző és a számjegyek összege 2013?

168. A 2011, 2012, 2013, 2014 számok közül melyek írhatók fel kettő vagy több egymást követő pozitív páratlan szám összegeként?

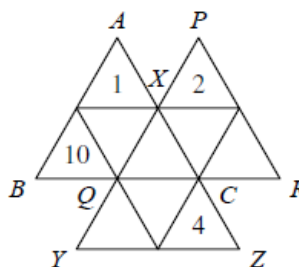
169. Egy esküvői vacsorán 16 fős asztaltársaság tagjai közül néhányan ismerik egymást. A nácsnag megkérdezi az asztaltársaság tagjait, hogy hány személyt ismernek az asztalnál ülők közül. Az első öt válaszadó által kimondott öt szám mindegyike különbözik egymástól. Ány embert ismerhet a hatodik személy az asztalnál ülők közül? (A ismertséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

170. Hány olyan különböző (egymással nem egybevágó) háromszög van, amelynek két oldala 2 cm és 7 cm hosszúságú, és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal centiméterben vett mérőszáma is egész szám?

**171.** Egy  $3 \times 3$ -as négyzetrács rácspontjait kijelölve az alábbi 16 pontból álló ábrát kaptuk. Legfeljebb hány pontot lehet kijelölni a 16 pontból úgy, hogy a pontok közül semelyik három ne essen egy egyenesre?



**172.** Az ábrán az ABC, PQR és XY Z háromszögek láthatók, amelyek háromszögre van felosztva. A 10 kicsi háromszögbe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat kell elhelyezni (mindegyiket egyszer felhasználva) úgy, hogy az ABC, PQR és XY Z háromszögekbe kerülő számok összege egyenlő legyen. Az 1, 2, 4, 10 számok elhelyezése előre adott. Hány különböző módon tölthető ki az ábra? Adjuk meg a megfelelő eseteket!



**173.** Egy zár, amelyen három nyomógomb van, akkor nyílik ki, ha a három különböző gombot egy meghatározott sorrendben közvetlenül egymás után nyomjuk meg. Legkevesebb hány gombnyomásra van szükség ahhoz, hogy biztosan kinyíljon az zár? (A megfelelő három gombnyomást esetlegesen megelőző gombnyomások sorozatának nincs hatása az ár szerkezetére.)

**174.** András Béla Csaba Dénes és Elemér egy asztal körül ülnek. Andrásnál kezdetben öt kavics van, A többieknek egy sincs. Egy lépés abból áll, hogy valaki, akinél legalább két kavics van, a két szomszédjának az egyet-egyét. El tudják e érni, hogy néhány lépés után mindannyiunknál pontosan egy kavics legyen?

**175.** Egy négy fős társaság a következő játékot játszotta. Egy zsákba betettek három piros és három kék sapkát, majd mindenki behunyt szemmel kihúzott egy sapkát és a fejére tette. Ezek után kinyitották a szemüket, és megvizsgálták egymás sapkájának a színét. A következő beszélgetés játszódott le közöttük:

A: Nem tudom, hogy milyen színű sapka van a fejem.

B: Mielőtt ezt mondtad én is így voltam vele, de most már kitaláltam, hogy az én fejem milyen színű sapka van. Milyen színű sapkát maradtak a zsákban?

**176.** A bűvös négyzet egy olyan négyzet alakú szám táblázat, amelynek minden egyes oszlopában, sorában és átlójában szereplő három szám összege ugyanannyi. Ezt az összeget szokás bűvös összegnek nevezni. Adjuk meg a mellékelt megkezdett ( $3 \times 3$ -as) bűvös négyzet minden lehetséges kitöltését.

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | 2 |   |
| 3 |   | 4 |
|   |   |   |

**177.** Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzata osztható 10-zel?

**178.** Hányféle olyan háromjegyű szám létezik, amelyben a számjegyek összege és szorzata egyenlő?

**179.** Melyik az a legkisebb pozitív egész  $n$  szám, amelyre igaz, hogy  $n$  darabszámot kiválasztva az első 2020 pozitív egész szám közül, biztosan lesz közöttük kettő, amelyek különbsége 4?

## Tartalomjegyzék

I. Halmazok

II. Algebra

III. Geometria

IV. Algebra

V. Függvények

VI. Kombinatorika

VII. Geometria

VIII. Feladatgyűjtemény

