

Új dimenziókban az osztójáték segítségével

VISEGRÁD, 2025.10.18., MATEKTÁBOR

Mitől lesz valami 1, 2, 3 dimenziós?

Ötletek:

- ▶ Dimenzió száma – ahány irányban kiterjed az alakzat
- ▶ 2 dimenziós → nincs magassága; 1 dimenziós → szélessége sincs
- ▶ Nem tudom megfogalmazni, de úgy is mindenki érti



Az osztójáték (©Varga Tamás)

Adott egy alapszám (pl. 60)

- ▶ A játékosok felváltva mondják a szám önmagánál kisebb osztóit.
- ▶ Aki nem tud újabb osztót mondani, az veszít.
- ▶ Csak olyan osztót szabad mondani, amelyik semelyik elhangzott számnak nem osztója.

Tapasztalatszerzés

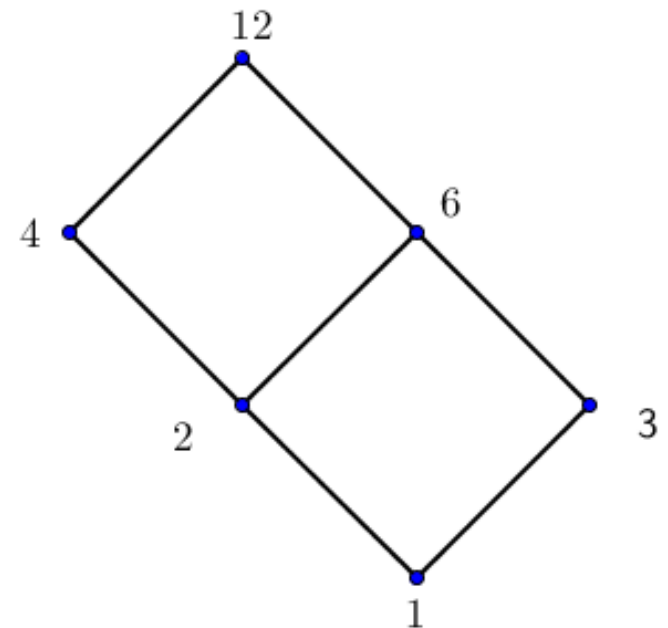
- Játsszatok néhány meccset a mellettetek ülővel 120-as alapszám esetén.
- Keressetek minél több és minél többféle olyan alapszámot, amelyre van nyerő stratégiátok (*ti dönthetitek el, hogy kezdeni akartok, vagy másodiknak lenni*)

Emlékeztető: Csak olyan osztót szabad mondani, amelyik semelyik elhangzott számnak nem osztója.

Az osztóháló

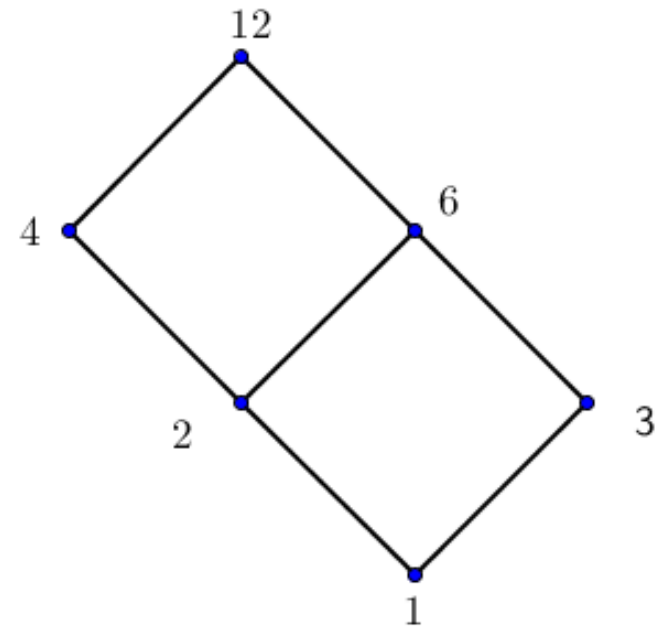
- Cél: egy természetes szám osztóinak hálózatba rendezése bizonyos szabályszerűségek alapján.

A 12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 12



A háló felrajzolásának elve

- ▶ A szám összes osztója bekerül.
- ▶ Szinteket hozunk létre. A legfelső szinten van a kiindulási szám, alatta azok az osztók, amelyeket egy prímtényező elhagyásával kapunk, azok alatt azok az osztók, amelyeket újabb prímtényező elhagyásával kapunk, stb.
- ▶ Egymás alatti szinteken lévő számokat akkor kötünk össze, ha egymás osztói/többszörösei.

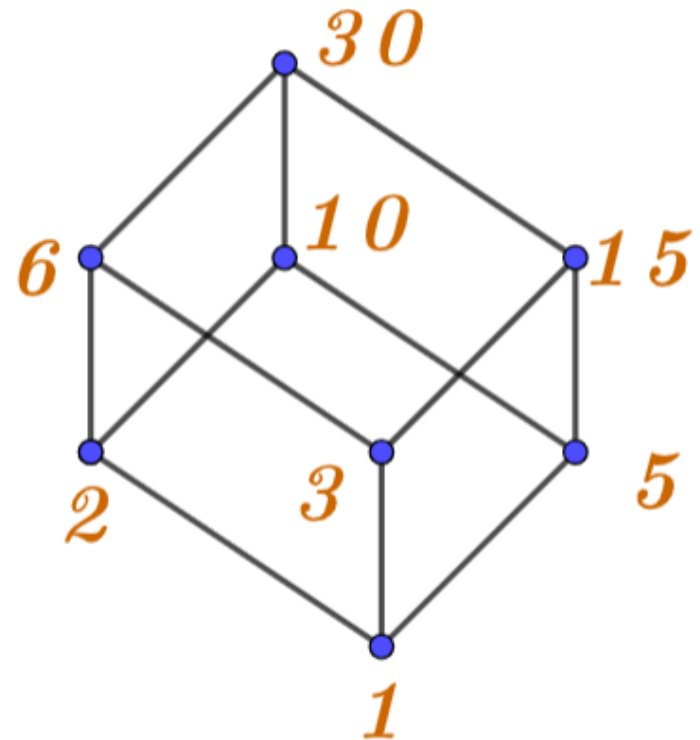


Gyakoroljunk!

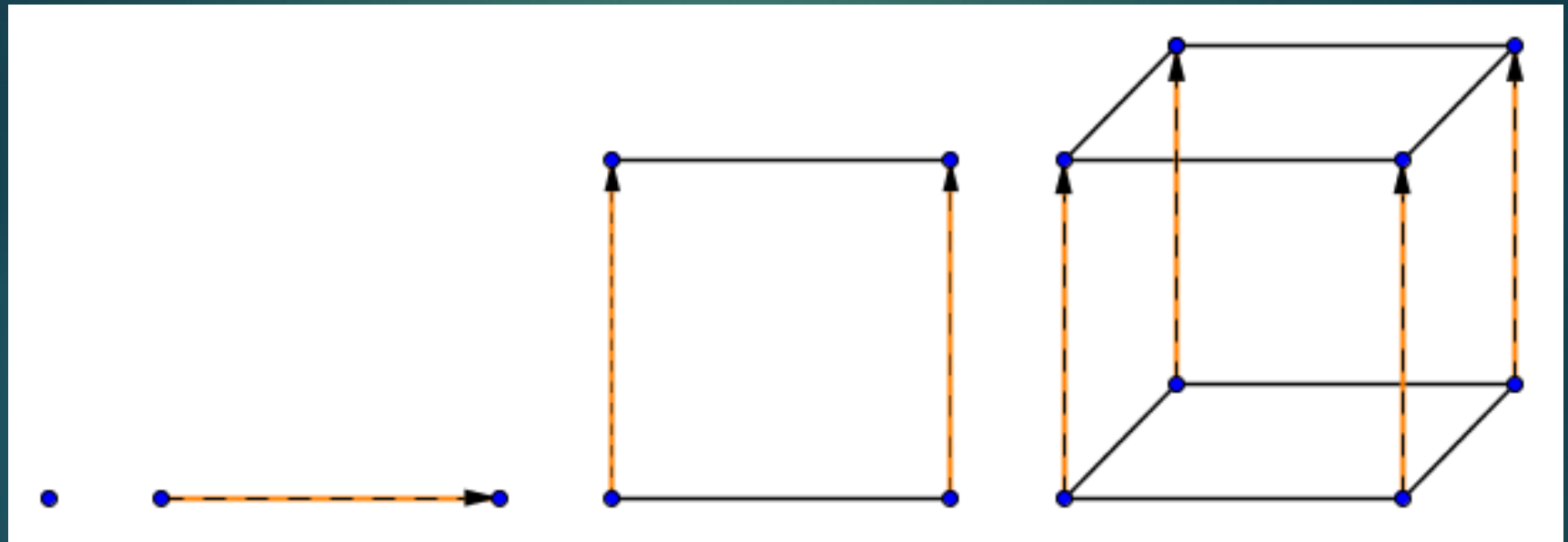
Készítsd el a 24, 36,
a 30, és a 60
osztóhálóját!

Adj nyerő stratégiát
az osztójáték 36-os
és 30-as alapszám
esetén!

Álljunk csak
meg egy
pillanatra!



A kocka evolúciója



0 dim

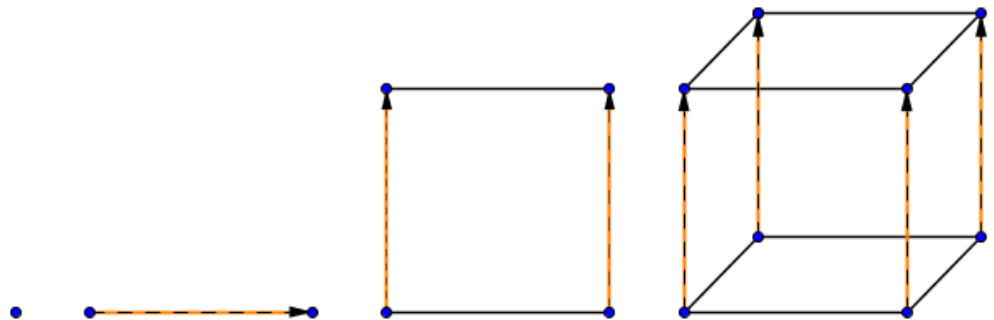
1 dim

2 dim

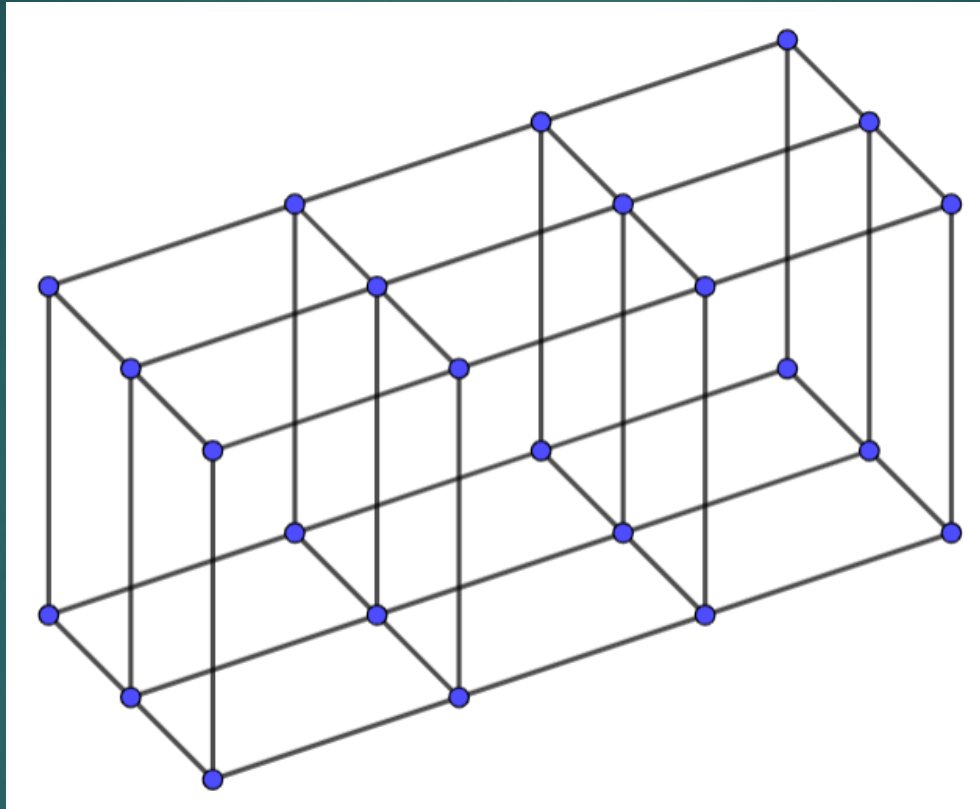
3 dim

Az evolúciós lépés

Veszünk egy előző dimenziós példányt, eltoljuk a példányra merőleges irányban 1 távolságra, majd összekötjük az eredeti és az új alakzat egymásnak megfelelő csúcsait

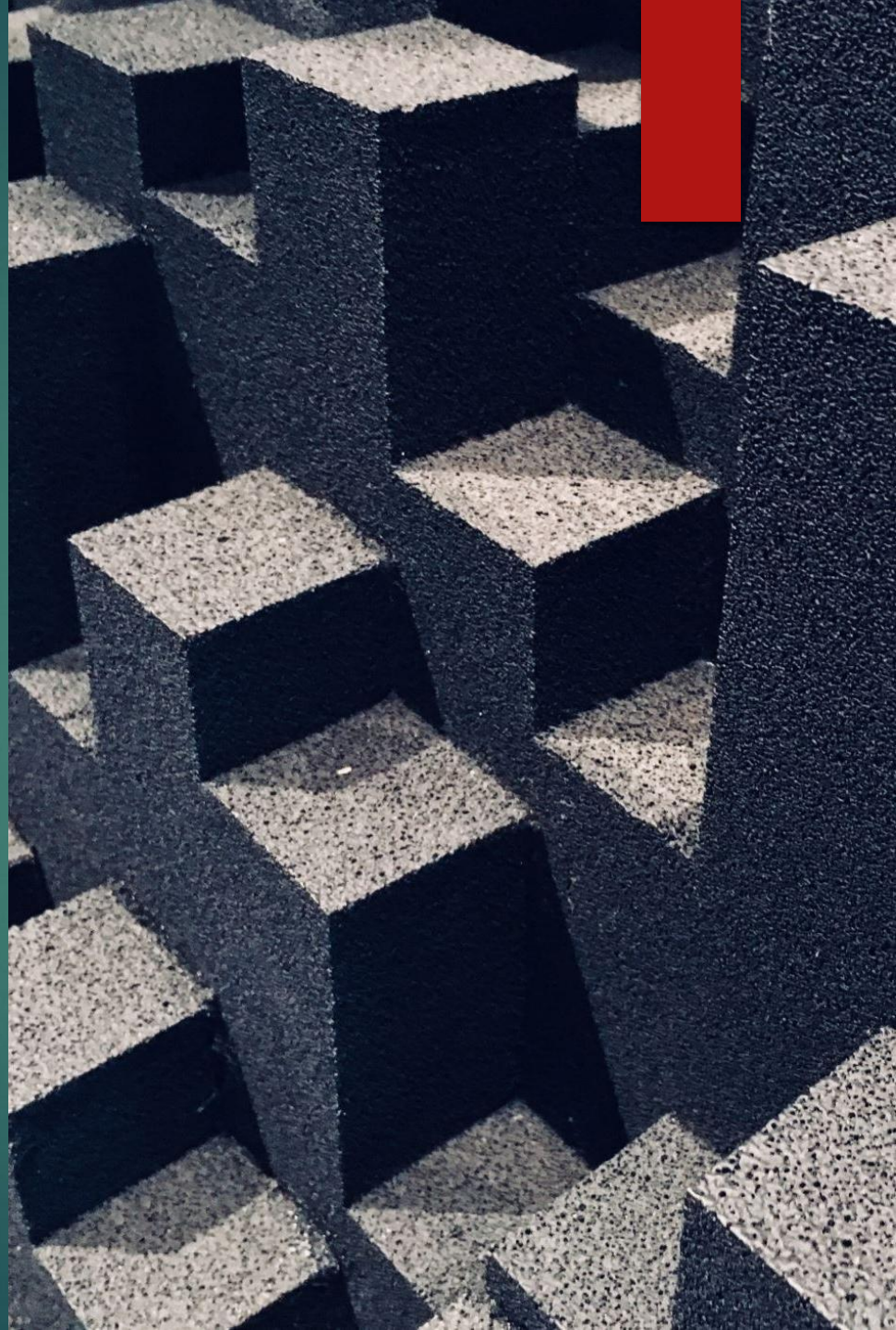


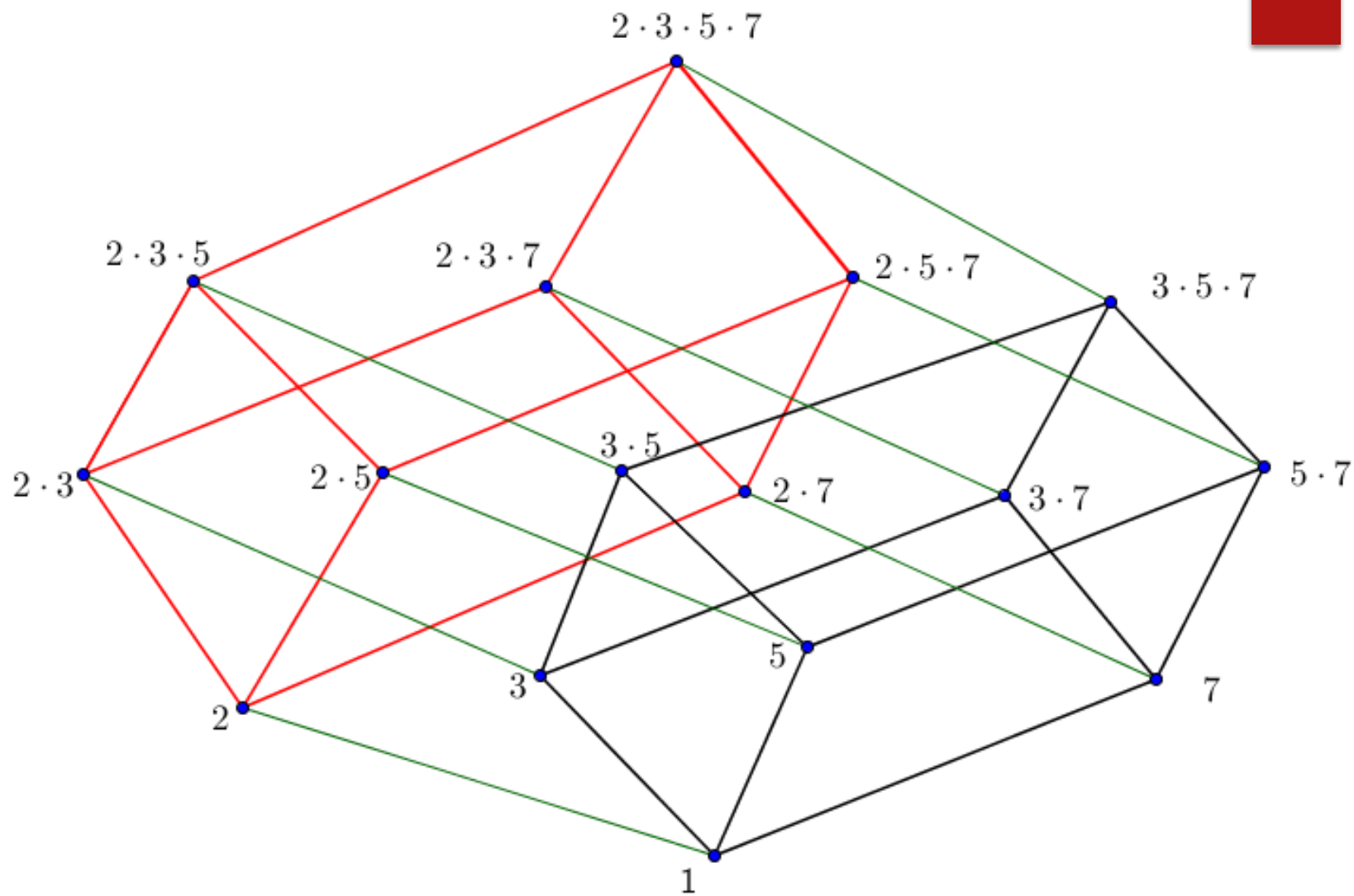
Mondjunk számot, aminek ez a
kockahálója?



Lám, lám, a téglatestek térfogatképlete és az
osztók száma képlet ugyanarról mesél!

De miért
állnánk meg
a három
dimenziónál?





ÉS SZEMÜNK
ELÉ TÁRULT A
4 DIMENZIÓS
KOCKA!!!!

Mitől lesz valami 1, 2, 3 dimenziós?

Ötletek:

- ▶ Dimenzió száma – ahány irányban kiterjed az alakzat
- ▶ 2 dimenziós → nincs magassága; 1 dimenziós → szélessége sincs
- ▶ Nem tudom megfogalmazni, de úgy is mindenki érti

Akkor a gömb most két vagy 3 dimenziós?

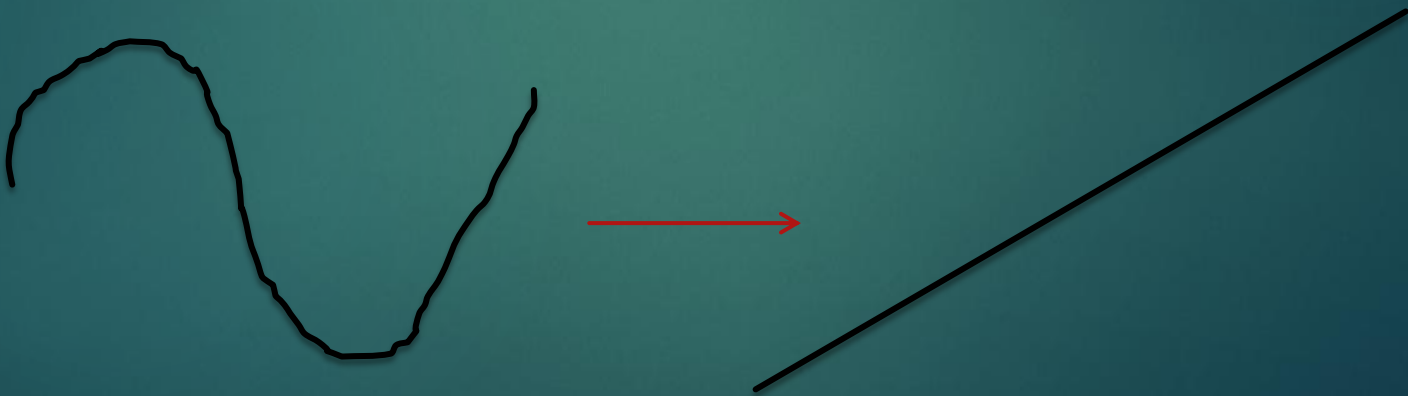
► Fontos különbség van egy alakzat és a határpontjai által alkotott alakzat közt, mindig el kell dönteni, hogy melyikről beszélünk.

► Pl: körlap – körlemez, „üres” gömb – „tömör” gömb



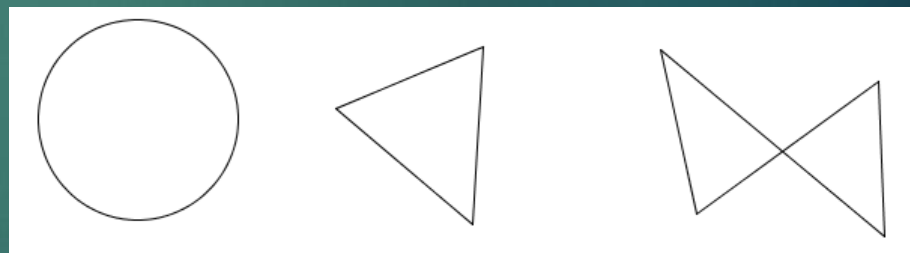
Mitől 1 dimenziós egy geometriai alakzat?

Az alakzatot gumiból elkészítve bármelyik pontnak ki tudjuk vágni olyan környezetét, amely szakasszá nyújtható, formálható.





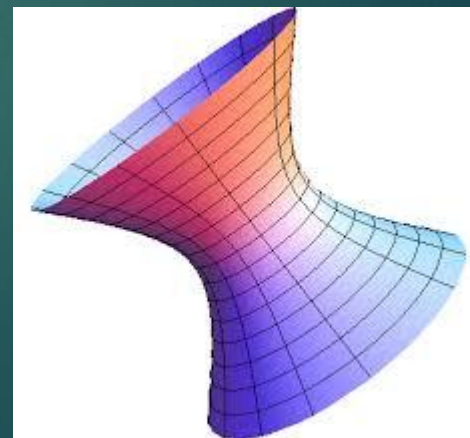
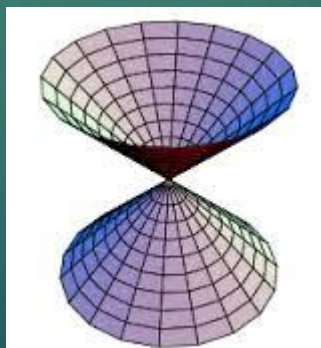
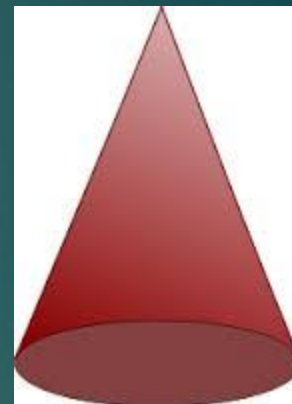
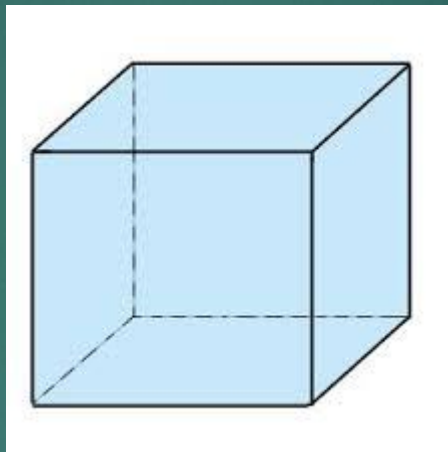
Példák és ellenpéldák



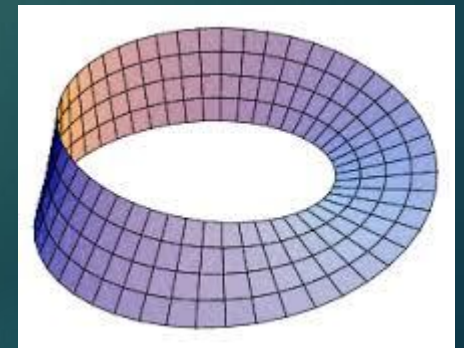
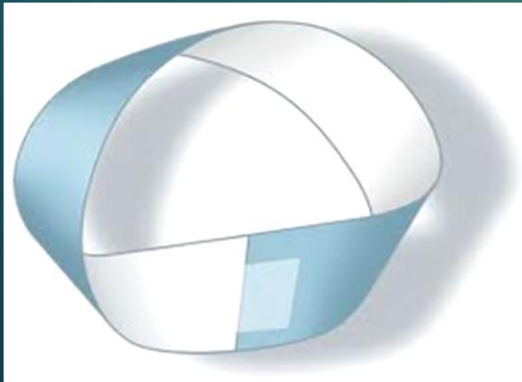
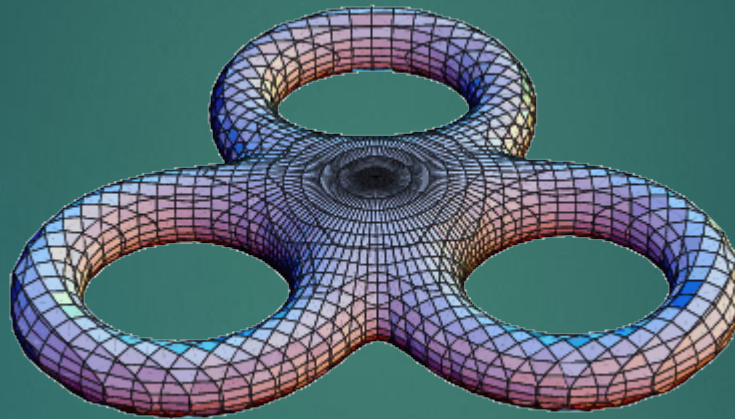
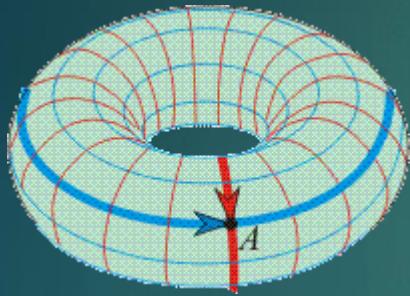
2 dimenziós alakzatok:

- ▶ *Az alakzatot gumiból elkészítve bármelyik pontnak ki tudjuk vágni olyan környezetét, amely körlappá nyújtható, formálható.*

Példák és ellenpéldák



És még néhány...



3 dimenziós alakzatok:

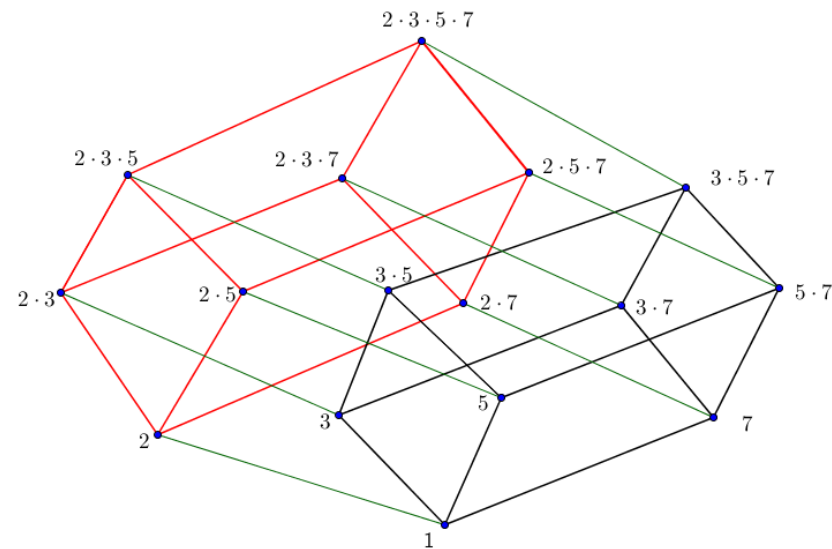
- ▶ *Az alakzatot gumiból elképzelve bármelyik pontnak ki tudjuk vágni olyan környezetét, amely tömör gömbbé nyújtható, formálható.*

Példák

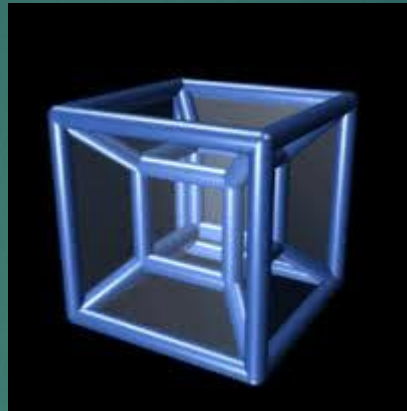


Testek négy dimenzióban

- ▶ Ahogy egy három dimenziós poliédert 2 dimenziós lapok határolják, úgy egy négy dimenziós „poliédert” 3 dimenziós lapok határolják.
- ▶ Ezeket a testeket nehezen tudjuk elképzelni, de lerajzolni a vetületeiket le tudjuk, ahogy két dimenzióban is megjeleníthető egy három dimenziós test.



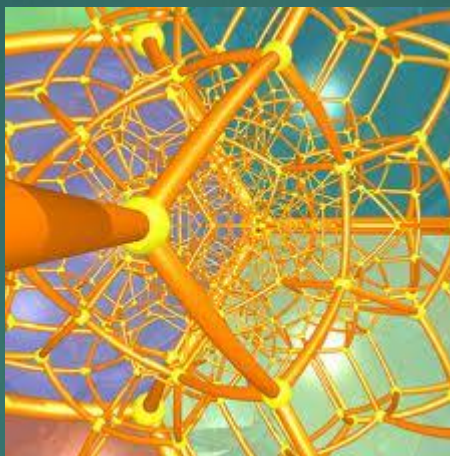
Szabályos testek 4 dimenzióban



Néhány kép a 600 celláról



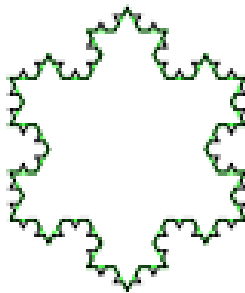
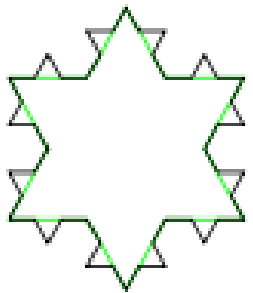
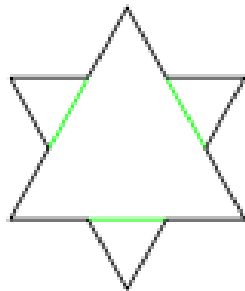
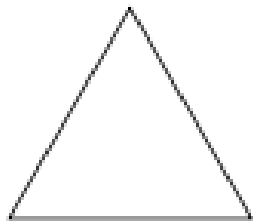
És még néhány a 120 celláról



https://www.youtube.com/watch?v=0uT6q_hrK50

*És ez
még
mind
semmi...*

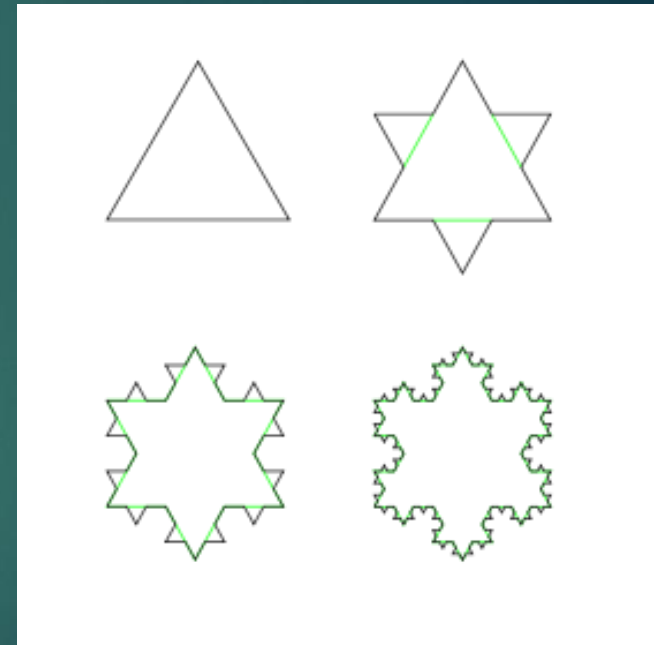
A fraktálok



A Koch-
hópehely

A hópehely keletkezése

- ▶ Egy egység oldalú szabályos háromszögből indulunk ki, minden oldalát elharmadoljuk.
- ▶ Az elharmadolt szakaszok középső harmadára kifelé szabályos háromszögeket rajzolunk.
- ▶ Minden határoló szakasszal ismételjük az eljárást
- ▶ Az ismételgetést végtelen sokáig folytat, ameddig csak lehet (végtelen sokáig)



Mennyi a terület az egyes lépések után?

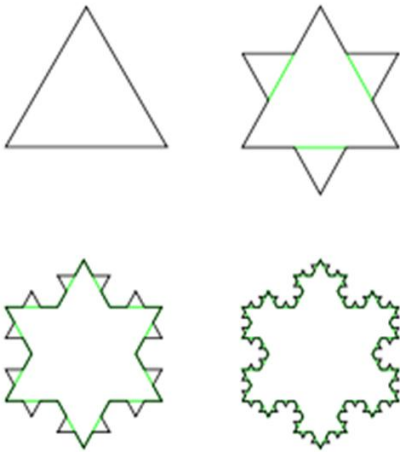
► $K_0 = 3$

► $K_1 = 4$

► $K_2 = \frac{16}{3}$

► $K_3 = \frac{64}{9}$

*Minden lépésben $\frac{4}{3}$ -szoros
növekedés*



- [illegible]

A Sierpinski-háromszög

Egység oldalú szabályos háromszögből kiindulva minden lépésben elhagyjuk a meglévő háromszögek középvonal-háromszögeit



A belső kerület

- ▶ $K_0=3$
- ▶ $K_1=9/2$
- ▶ $K_2=27/4$
- ▶ $K_3=81/8$

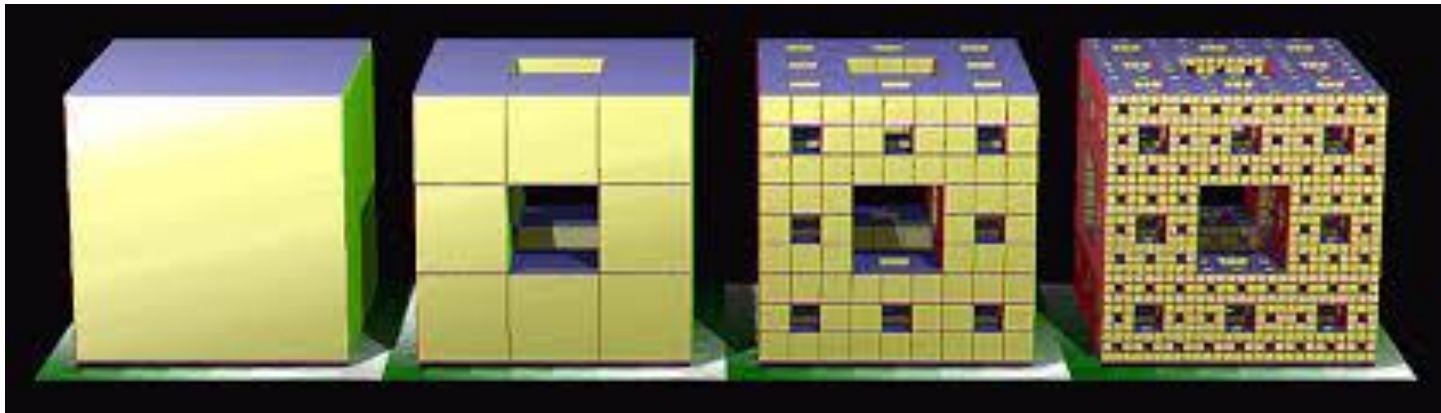
Minden lépésben 3/2-szeres növekedés



A terület

- ▶ A terület mindig az előző $\frac{3}{4}$ része lesz
- ▶ Ez azt jelenti, hogy a terület 100 lépés alatt 0.000000000000000032072 részére csökken.

A terület minden határon túl csökken, egyre inkább közelít a 0-hoz.



A Menger-szivacs

Felszín és térfogat

A felszín minden lépésben 12/9-szeresére nő

A térfogat minden lépésben 20/27-részére csökken

A felszín végtelenbe tart, a térfogat a 0-hoz

A dimenzió lényeges tulajdonsága

- ▶ 2-szeresre nagyított síkidom területe 4-szeres
 - ▶ 3-szorosra nagyított síkidom területe 9-szeres
 - ▶ x -szeresre nagyított síkidom területe x^2 -szeres

 - ▶ 2-szeresre nagyított térbeli alakzat területe 8-szeres
 - ▶ 3-szorosra nagyított térbeli alakzat területe 27-szeres
 - ▶ x -szeresre nagyított térbeli alakzat területe x^3 -szeres
- x -szeresre nagyított alakzat területe x^d -szeres*

Más
megfogalmazásban:

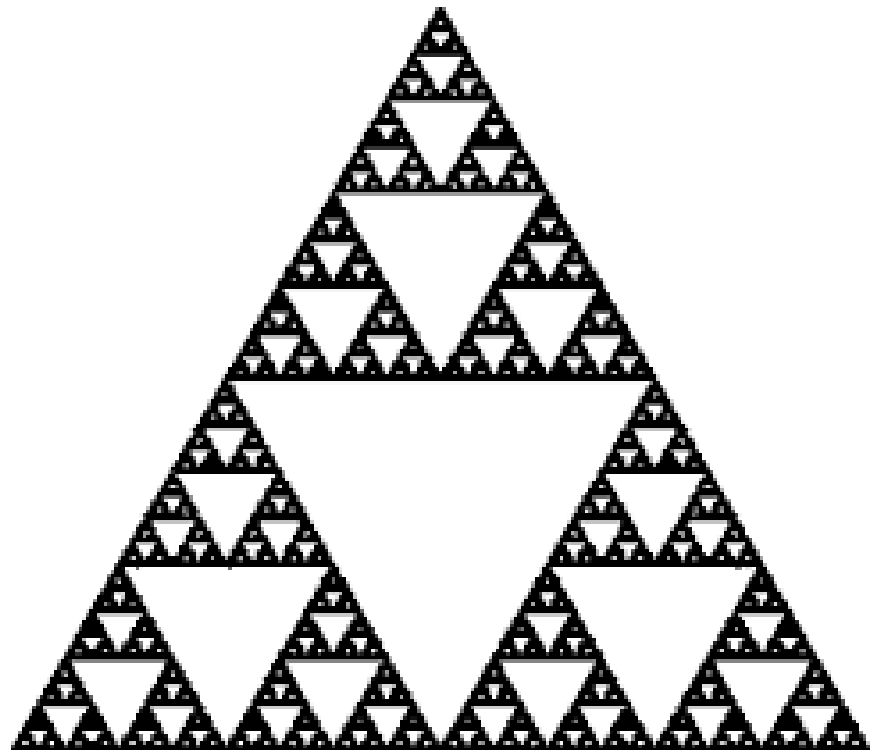
- ▶ Ha egy két dimenziós alakzatot x -szeresre nagyítok, a nagyított alakzat az eredetiből x^2 darabnyit tesz ki.
- ▶ Ha egy három dimenziós alakzatot x -szeresre nagyítok, a nagyított alakzat az eredetiből x^3 darabnyit tesz ki.
- ▶ Ha egy d dimenziós alakzatot x -szeresre nagyítok, a nagyított alakzat az eredetiből x^d darabnyit tesz ki.

A Sierpinski-háromszög dimenziója

A háromszöget 2-szeresre nagyítva az eredeti alakzatból három példányt kapok.

$$2^d = 3$$

$$d = \log_2 3 = 1,585$$



A Menger-szivacs dimenziója

*A szivacsot 3-szeresre
nagyítva az eredeti
alakzatból 20
példányt kapok.*

$$3^d = 20$$

$$d = \log_3 20 = 2,727$$

