

A KÖZÖS GONDOLKODÁSRA KITŰZÖTT FELADATOK ÉS MEGOLDÁSAI

MATEKTÁBOR (9-12. OSZT.), VISEGRÁD, 2025. OKTÓBER 17–19.

1. Egy kockának megjelöljük a csúcsait, lapközéppontjait, élfelezőpontjait, és a kocka középpontját, összesen 27 pontot. Hány olyan egyenes van, amelyre három pont illeszkedik a megjelöltek közül?

Megoldás: 49

2. Luca egy papírra növekvő sorrendben felírta azokat a négyjegyű számokat, melyeknek számjegyei különbözőek és csökkenő sorrendben állnak. Hányadik helyen szerepel a négyjegyűek között a 8642?

Megoldás. (a) A háromjegyű számok közül az első hét növekvő sorrendben a következő:

$$210, 310, 320, 321, 410, 420, 421.$$

Tehát a hetedik szám Luca lapjának első oldalán a 421.

(b) Vegyük észre, hogy ha adott négy különböző számjegy, akkor ez meghatároz pontosan egy számot, mégpedig azt, amelyben az adott jegyek csökkenő sorrendben követik egymást.

Nézzük meg először, hogy hány olyan szám van a lapon, amely kisebb, mint 8000. Ebben csak a 0, 1, 2, ..., 7 számjegyeket lehet felhasználni. Tehát annyi ilyen szám van a lapon, ahányféleképpen a 8 számjegyből kiválaszthatunk 4-et. Ezek száma:

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70.$$

Nézzük meg, hogy hány olyan N szám van a lapon, amelyre igaz, hogy $8000 \leq N < 8600$. Ezeknek az első számjegye biztosan 8-as, a maradék 3 helyre pedig a 0, 1, 2, ..., 5 számjegyek közül választhatunk. Tehát hat számjegy közül kell választanunk 3-at, vagyis az ilyen számok száma:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Most nézzük meg, hogy hány olyan N szám van a lapon, amelyre igaz, hogy $8600 \leq N < 8640$. Ezeknek az első két számjegye biztosan 8-as és 6, a maradék 2 helyre pedig a 0, 1, 2, 3 számjegyek közül választhatunk. Tehát négy számjegy közül kell választanunk 2-t, vagyis az ilyen számok száma:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

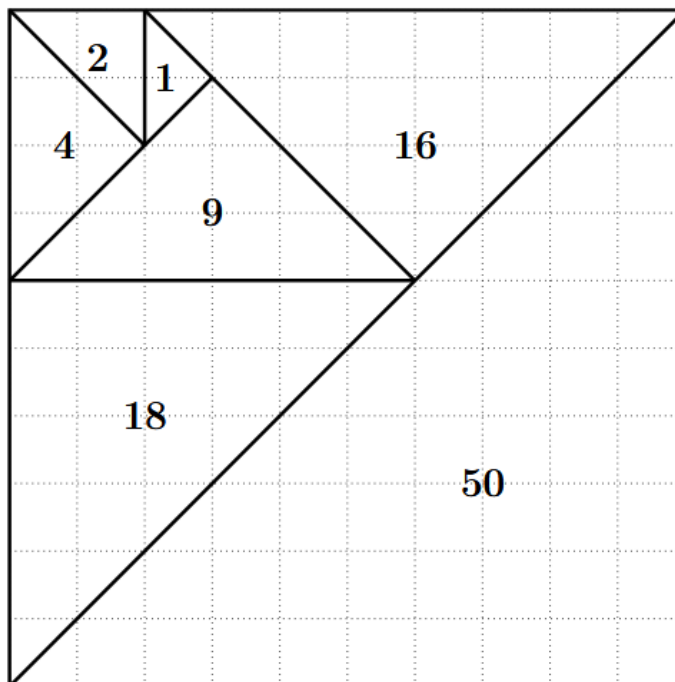
Végül nézzük meg, hogy hány olyan szám van a listán, amely legalább 8460, de kisebb, mint 8642. Ezek a 8640 és a 8641.

Összegezve: Luca lapjának hátoldalán $70 + 20 + 6 + 2 = 98$ olyan szám áll, amely kisebb, mint 8642.

Tehát a keresett szám a 99. helyen szerepel a lap hátoldalán.

3. Ossz fel egy 10 egység oldalhosszúságú négyzetet hét darab egyenlő szárú, derékszögű háromszögre, amelyek területe növekvő sorrendben: 1, 2, 4, 9, 16, 18, 50 területegység.

Megoldás. A helyes felosztás:



Megjegyzés.

Az 50 területű háromszög az egész négyzet területének felét fedi le – ez csak úgy lehet, ha a négyzet egyik átlója megegyezik az átfogójával.

A 2, 18 és 50 területű háromszögek befogói egész hosszúságúak, rendre: 2, 6, 10.

Az 1, 4, 9 és 16 területű háromszögeknek viszont az átfogói lesznek egész hosszúságúak, rendre: 2, 4, 6 és 8.

Ebből megsejthetjük, hogy ha egy a 10×10 -es négyzetünket egy négyzetrácson helyezzük el, akkor a jó felosztásban a 2, 18 és 50 területű háromszögeknek a befogói lesznek párhuzamosak a rácsvonalakkal; míg a többi darabnál az átfogó lesz valamelyik rácsvonallal párhuzamos.

4. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek az összes osztója közül a negyedik legnagyobb a 42? Például a 12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6 és 12, így a negyedik legnagyobb osztója a 3.

Megoldás. Legyen N egy olyan szám, amelynek a negyedik legnagyobb osztója 42. Ekkor N osztható 42-vel, így 2-vel, 3-mal és 6-tal is, ezért N három legnagyobb osztója biztosan N , $\frac{N}{2}$ és $\frac{N}{3}$. (2 pont)

Mivel az $\frac{N}{6}$ biztosan szerepel az osztók között, a negyedik legnagyobb osztó csak az $\frac{N}{4}$, az $\frac{N}{5}$ vagy az $\frac{N}{6}$ lehet. (2 pont)

Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{4}$, akkor $N = 42 \cdot 4 = 168$. Ennek valóban 42 a negyedik legnagyobb osztója. (1 pont)

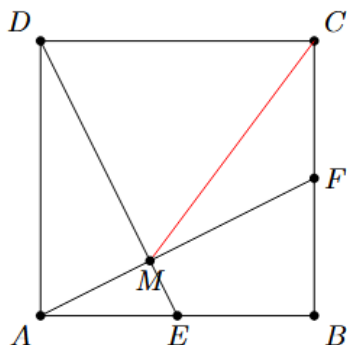
Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{5}$, akkor $N = 42 \cdot 5 = 210$, ennek is valóban 42 a negyedik legnagyobb osztója. (1 pont)

Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{6}$, akkor viszont $N = 6 \cdot 42 = 252$, ez viszont osztható 4-gyel is, és így a 42 csak az ötödik legnagyobb osztója (az $N = 252$, az $\frac{N}{2} = 126$, az $\frac{N}{3} = 84$ és az $\frac{N}{4} = 63$ után). (1 pont)

Tehát **2 olyan szám van**, ami a feladat feltételeinek megfelel, a 168, illetve a 210.

5. Az ABCD egységnyi oldalhosszúságú négyzetben az AB oldal felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja F. Az AF és DE egyenesek metszéspontja M. Milyen hosszú a CM szakasz?

Megoldás. Készítsünk ábrát a feladathoz.

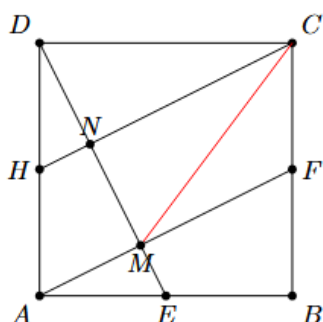


Vegyük észre, hogy $AF \perp DE$. (1 pont)

Ez azért teljesül, mert AED és ABF derékszögű háromszögek egybevágók (hiszen egyik befogójuk 1, a másik befogójuk pedig $\frac{1}{2}$), és egymáshoz képest derékszöggel vannak elforgatva. (1 pont)

Bizonyítás középvonallal és tükrözéssel

Legyen DA oldal felezőpontja H , és húzzuk be a CH szakaszt. Jelölje DE és HC metszéspontját N . (1 pont)



Ekkor $CH \parallel AF$ (például azért, mert $AFCH$ egy paralelogramma, hiszen HA és CF párhuzamos és egyenlő hosszú), és így persze $DM \perp HC$. (1 pont)

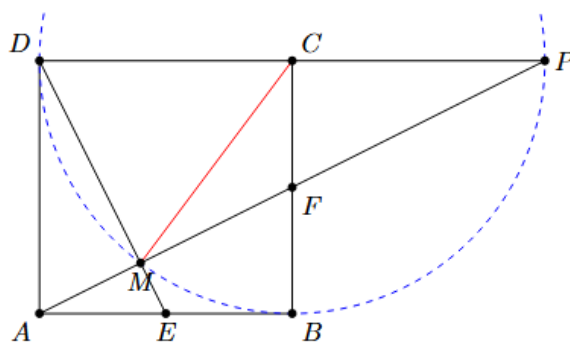
Vegyük észre, hogy az AMD háromszögben HN éppen középvonal, hiszen párhuzamos AM -mel és átmegy AD felezőpontján. Következésképpen N a DM felezőpontja. (2 pont)

Tehát HC merőlegesen felezi DM szakaszt, azaz D -t tükrözve HC tengelyre éppen M pontot kapjuk. Így a DC szakaszt tükrözve HC tengelyre MC szakaszt kapjuk, azaz $MC = CD = 1$. (1 pont)

Összesen: 7 pont

Bizonyítás a Thalész-tétel megfordításával

Jelölje az AF és a CD egyenesek metszéspontját P . (1 pont)



ABF és PCF derékszögű háromszögek egybevágók, mivel szögeik megegyeznek ($FBA \angle$ és $FCP \angle$ derékszögek; $AFB \angle$ és $PFC \angle$ csúcsszögek; $BAF \angle$ és $CPF \angle$ váltószögek) és $BF = FC = \frac{1}{2}$. Így $PC = CD = 1$, azaz DP felezőpontja C . (1 pont)

DMP háromszög derékszögű. A Thalész-tétel megfordítása miatt a PD átfogó Thalész-köre (amelynek középpontja a fentiek szerint C) átmegy az M ponton. (2 pont)

Tehát $CM = CD = CP = 1$. (1 pont)

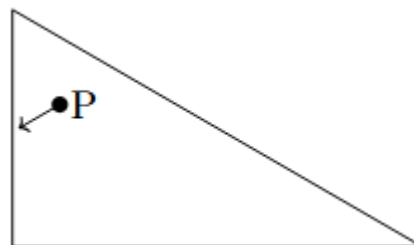
6. Egy ötjegyű számot csattanósnak hívunk, ha a százask és a tízesek helyén azonos számjegy áll, és ennél nagyobb számjegy áll az egyesek helyén. Hány 9-cel osztható csattanós szám van?

Megoldás. Mivel az első számjegy nem lehet 0, így az 9-féle különböző értéket vehetne fel. Ha azonban vizsgáljuk a szám másik négy számjegyét, kiderül, hogy a 9-cel való oszthatóság miatt ezek közül pontosan egy lesz jó. (Pontosan akkor osztható egy szám 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel. Jelölje az utolsó négy számjegy összegét S . Ekkor $S + 1, S + 2, \dots, S + 9$ kilenc egymást követő egész szám, tehát közülük pontosan egy osztható 9-cel.) (3 pont)

Tehát a 9-cel való oszthatóságot inentől nem kell figyelembe vennünk, csak azt kell összeszámolnunk, hogy hány olyan szám van, ami a feladat többi feltételét teljesíti, vagyis a százask és tízesek helyén álló számjegye egyenlő, és az egyesek helyén álló számjegye ezeknél nagyobb. Minden egyes ilyen szám pontosan egyféleképpen egészíthető ki csattanós számmá.

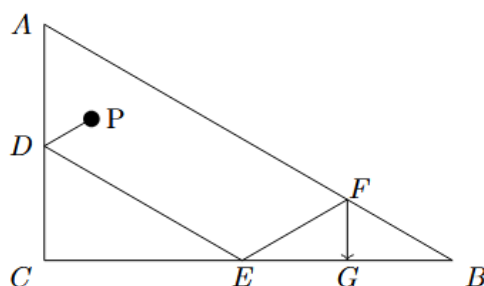
Ha a százask és tízesek helyén álló számjegy k , akkor az egyesek helyén $(9 - k)$ -féle számjegy szerepelhet. Az utolsó három jegyet tekintve tehát $9 + 8 + \dots + 2 + 1 = 45$ -féle végződés jön szóba, ezek mindegyikénél az ezresek helyén mind a tízféle számjegy szerepelhet, tehát összesen $10 \cdot 45 = 450$ csattanós szám van. (4 pont)

7. Egy derékszögű háromszög alakú, lyukak nélküli biliárdasztal egyik csúcsánál az oldalak 30° -os szöget zárnak be egymással. Egy biliárdgolyót elindítunk az ábrán jelölt módon, a P pontból úgy, hogy az először az asztal legrövidebb oldalát éri el annak egy belső pontjában. A golyó haladási iránya 60° -os szöget zár be a legrövidebb oldallal.



A golyó útját vizsgálva azt látjuk, hogy minden egyes alkalommal, amikor találkozik a fallal, tökéletesen pattanva halad tovább, vagyis a falhoz érkező, valamint a faltól elinduló haladási iránya ugyanakkora szöget zár be a fallal. Hány pattanás után lesz a golyó újra a P pontban?

Megoldás. Tekintsük az alábbi ábrán a golyó útja során az első három pattanást.



(Jó ábra: 2 pont)

A szöveg szerint felírható, hogy $\angle EDC = \angle PDA = 60^\circ$, tehát DE szakasz párhuzamos AB -vel. Emiatt a golyó az első pattanás után biztos, hogy a háromszög hosszabb befogójának belső pontján pattan meg. Innen az iránya miatt csak az átfogóhoz érhet, s a szögek alapján látni fogjuk, hogy a következő pattanás helye megint a BC oldal belsejébe esik. (1 pont)

CDE háromszögben már meghatározható, hogy $\angle DEC = 30^\circ$, s a pattanás miatt $\angle DEC = \angle FEG$, tehát ez utóbbi is 30° -os. Emiatt $\angle DEF = 120^\circ$, vagyis $\angle EFA = 60^\circ$. A pattanás miatt ez megegyezik $\angle BFG$ -gel. Mivel a B -nél levő szög 30° -os, ezért $\angle FGB = 90^\circ$. (2 pont)

Tehát a golyó inentől kezdve ugyanezt az útvonalat járja be visszafelé, (1 pont)

vagyis rendre a D, E, F, G, F, E, D pontokon át, **7 pattanás után lesz újra a P pontban.** (1 pont)

8. Egy pingpongbajnokságon 5 balkezes és 8 jobbkezes játékos vett részt, és mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszott. Ugyanannyi meccset nyert jobbkezes játékos, mint balkezes. Hányszor fordult elő, hogy egy balkezes megvert egy jobbkezeset?

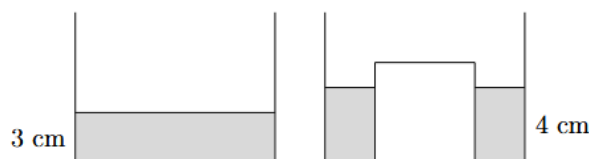
Megoldás. Osszuk a mérkőzéseket három csoportba. Az első csoportba kerüljenek azok, ahol balkezes játszott balkezessel. Ilyenből $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ volt. A második csoportba tegyük azokat, ahol egy balkezes és egy jobbkezes játszott, ez $5 \cdot 8 = 40$ mérkőzés. Végül maradtak a jobbkezesek közötti mérkőzések, $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ ilyen volt. (2 pont)

Összesen a $10 + 40 + 28 = 78$ mérkőzés felét, 39-et nyerte balkezes. (2 pont)

Mivel az első csoportban minden meccset balkezes nyert (ez 10 meccs), a harmadik csoportban pedig nincsenek balkezes győzelmek, ezért a második csoportban 29 balkezes győzelem született. (2 pont)

Ezek pont azok a mérkőzések, ahol egy balkezes legyőzött egy jobbkezeset. Tehát 29 ilyen mérkőzés volt. (1 pont)

9. Van egy kisebb és egy nagyobb kockánk. A kisebb kockát teletöltöttük vízzel. Ezután az összes vizet áttöltöttük a nagyobb kockába (amely valamelyik lapján támaszkodva áll az asztalon), így a nagyobb kockában 3 cm magasan áll a víz. Ezután a kisebb kockát is beleraktuk a nagyobb kockába úgy, hogy annak az egyik lapja a nagyobb kocka aljához tapadjon, de a víz ne folyjon bele a kisebb kockába. Ennek hatására a nagyobb kockában 1 cm-rel megemelkedett a vízszint. Határozzuk meg a kockák élhosszúságait.



Megoldás. Jelölje a kockák cm-ben mért élhosszát a és b ($a > b$). A víz térfogata egyenlő a kisebbik kocka térfogatával, ez b^3 . (1 pont)

Az áttöltés után ez a térfogat $3a^2$ alakban áll elő, mert egy a^2 alapterületű, 3 cm magas téglatestet alkot a víz. (1 pont)

Miután a kisebb kockát beletettük a nagyobbba, ugyanez a térfogat $4(a^2 - b^2) = 4a^2 - 4b^2$ alakban jelenik meg. (1 pont)

A töltögetés során a víz térfogata nem változik, tehát $b^3 = 3a^2 = 4a^2 - 4b^2$. (2 pont)

Az egyenletrendszert megoldva először $2b = a$, innen $12b^2 = b^3$, vagyis $b = 12$ adódik. Tehát a kockák élhossza $a = 24$ cm és $b = 12$ cm. (2 pont)

10. Tizenhat diák focizik, nyolc a nyolc ellen. Közülük heten járnak fociedzésre, kilencen nem. Nóri jár fociedzésre, és olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában (vele együtt) többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

Megoldás. Nándi úgy tud kialakítani edzésre járó többséget a csapatában, ha maga mellé még hat, öt, négy vagy három olyan tagot választ, akik szintén járnak edzésre. Nándin kívül még hat ember jár edzésre és kilenc nem. Nevezzük az első csoportot E halmaznak, a másodikat N halmaznak. Nándinak összesen hét csapattársat kell választania úgy, hogy E -ből legalább hármat választ.

A jó eseteket az alábbi táblázat sorolja fel:

E -ből választott játékosok száma	N -ből választott játékosok száma
6	1
5	2
4	3
3	4

Általában egy n elemű halmazból k különböző elem $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots\cdot k}$ -féle módon választható ki. Ha E -ből x -féle módon tudunk választani, N -ből pedig y -féle módon, akkor ez összesen $x\cdot y$ lehetőség, mert az edzésre járók és edzésre nem járók csoportja tetszőlegesen párosítható, amennyiben a csoportok mérete rögzített.

A fentiek alapján Nándi lehetőségeinek száma:

$$\binom{6}{6} \cdot \binom{9}{1} + \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{2} + \binom{6}{4} \cdot \binom{9}{3} + \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{4} = 1 \cdot 9 + 6 \cdot 36 + 15 \cdot 84 + 20 \cdot 126 = 4005$$

11. Egy háromszög egy magasságvonalát *nagyranőttnek* nevezzük, ha legalább 10 cm hosszú. Mi egy olyan háromszög területének legkisebb lehetséges értéke, amelynek két *nagyranőtt* magasságvonala is van?

Megoldás. Legyen a két nagyranőtt magasságvonal hossza $m_a \geq 10$ és $m_b \geq 10$.

Egy tetszőleges háromszögben $b \geq m_a$, $c \geq m_a$, $a \geq m_b$, $c \geq m_b$. Ez abból következik, hogy egy adott csúcshoz legközelebb eső pontja a vele szemközt lévő oldalegyenesnek az, amellyel az őket összekötő szakasz merőleges az egyenesre.

$$\text{Innen } a \geq m_b \geq 10 \Rightarrow T = \frac{a \cdot m_a}{2} \geq \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

Az alsó becslés éles, megvalósul abban a derékszögű háromszögben, amelynek mindkét befogója 10 cm hosszú.

Tehát a legkisebb lehetséges terület 50 cm^2 .

12. Egy órának három mutatója van (kis-, nagy- és másodpercmutató), amelyek folyamatosan járnak. Az órában lévő elem kezd lemerülni, ezért az óra lelassul, ha valamelyik mutatója emelkedik. Ha csak egy mutató emelkedik, akkor az óra az eredeti sebességének felével jár, ha két mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség negyedével jár, ha pedig mindhárom mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség nyolcadával jár az óra. (Egy mutató akkor emelkedik, ha a hatost már elhagyta, de a tizenkettest még nem érte el.) Kezdetben mindhárom mutató legfelül, a tizenkettesen áll. Legkorábban hány óra múlva áll elő újra ugyanez a helyzet?

Első megoldás

A másodpercmutatónak $60 \cdot 12 = 720$ kört kell megtennie, hogy a mutatók vissza- térjenek eredeti helyzetükbe, mert 60 kör egy „órával” mozdítatja el a nagymutatót és ezt 12-szer kell megismételni. (Az idézőjeles „óra” itt a nagymutató által megtett egy teljes kört jelent.) Azt fogjuk nézni, hogy a kismutató és a nagymutató helyzetétől függően hány másodperc alatt tesz meg egy kört a másodpercmutató. Felhasználjuk, hogy a másodpercmutató egy teljes köre alatt az nem változik, hogy a másik két mutató „felfele” vagy „lefele” mozog. Amikor a nagymutató és a kismutató is lefele megy, akkor a másodpercmutató az első félkört lefelé teszi meg, tehát „valódi” időben, 30 mp alatt végez vele. A második félkörben felfele megy, ezért fele olyan gyors, így ehhez 60 mp kell. Így kapjuk összesen a 90 mp-es köridőt.

Foglaljuk táblázatba a különböző eseteket:

kismutató és nagymutató	körök száma	a másodpercmutató egy körének ideje
le, le	180	90 mp
fel, le	180	180 mp
le, fel	180	180 mp
fel, fel	180	360 mp

Összességében $180 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ másodperc telik el, amíg a mutatók visszatérnek eredeti helyzetükbe. Ez $3 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ perc, tehát $3 \cdot (32 + 3 + 3 + 6) = 40,5$ óra. Tehát 40 és fél óra után áll vissza az eredeti állapot.

Második megoldás

A mutatók egymáshoz képest ugyanúgy mozognak, mint egy pontosan járó óránál. Legközelebb akkor lesz mindhárom mutató a 12-esen, ha a kismutató egyszer körbeért. Ez háromszor annyi idő, mint amennyi alatt leér a 6-osig, hiszen a táv másik felén minden fele akkora sebességgel történik. Ahhoz, hogy a kismutató leérjen a 6-oshoz, a nagymutatónak 6 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör háromszor annyi idő, mint amennyi alatt a nagymutató leér a 6-osig – a fentiekhez hasonlóan. Ahhoz, hogy a nagymutató leérjen a 6-osig, a másodpercmutatónak 30 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör $3 \cdot 30$ másodperc (a kis- és nagymutatók még lefelé haladnak). Tehát a körbeéréshez szükséges idő $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 30 \cdot 3 \cdot 30 = 145800$ másodperc, azaz 40,5 óra

Megjegyzés

A feladat mélyén a következő észrevétel rejlik: mindegyik mutató a mozgása során az út egyik felét fele olyan lassan teszi meg, mint a másikat, így a mozgása másfélszer olyan hosszú ideig tart, mint normálisan. Mivel a mutatók mozgása egymástól „független”, és a mutatók egymást is lassítják, így ezek a másfélszeres szorzók összeszorozódnak, tehát a körbeéréshez szükséges idő az eredeti $1, 5 \cdot 1, 5 \cdot 1, 5 = 27/8$ -szorosa, ami végeredményként $12 \cdot 27/8 = 81/2 = 40,5$ órát ad.

13. Egy osztályba 29 gyerek jár. Azt tudjuk, hogy mindegyik gyerek 14 vagy 15 éves. Az osztályfőnök meg akarja tudni, hogy hány éves az egyik gyerek, de a gyerekek csak úgy hajlandók válaszolni, ha a tanár rámutat 11 gyerekre és akkor elárulják a 11 gyerek életkorának összegét. Mennyi a legkevesebb kérdés, amiből a tanár biztosan ki tudja találni, hogy hány éves a kérdéses személy?

Megoldás

Tegyük fel, hogy Sári életkorát keressük, amit jelöljünk s -sel. A többi diák életkora legyen $a_1, a_2, \dots, a_{28}$.

Egy kérdés nem lehet elég. Ugyanis ha Sári nem szerepel a kiválasztott 11 diák között, akkor nem tudunk semmit róla, ha pedig igen, akkor legyen mondjuk Júlia is benne az összegben, és akkor nem tudjuk megkülönböztetni a Sári 14, Júlia 15 éves esetet a Sári 15, Júlia 14 éves esettől. (1 pont)

Két kérdés sem elég. Ha Sári egyikben sem szerepel, akkor semmit nem tudunk róla. Ha Sári mindkettő kérdésben szerepel, akkor mindkét kérdésben lesz egy párja, aki a másik kérdésben nincs benne (különben a két kérdés azonos lenne, ami az előző eset). Ha eredetileg Sári 14, és a két párja 15, illetve Sári 15 és a két párja 14, akkor ugyanazt a választ kapja a tanár, tehát nem lehet a két eset között különbséget tenni. Ha Sári csak az egyik kérdésben szerepel, akkor két eset lehetséges: ha van olyan diák Sárin kívül, aki csak ebben a kérdésben szerepel, akkor nem lehet megkülönböztetni azt a két esetet, ha Sári 14 és ez a diák 15, vagy Sári 15 és ez a diák 14 éves. Ha nem ez a helyzet, akkor a maradék tíz diák mind a két kérdésben szerepel (legyen köztük egy Lili), és van még egy diák, Róza, aki csak a másik kérdésben szerepel. Ekkor a Sára, 14 Róza, 14 és Lili 15, illetve a Sára 15, Róza 14 és Lili 14 éves eseteket nem lehet megkülönböztetni egymástól. (2 pont)

Három kérdés viszont már elegendő:

$$\begin{aligned} K_1 &: s + (a_1 + \dots + a_5) + (a_6 + \dots + a_{10}) \\ K_2 &: s + (a_1 + \dots + a_5) + (a_{11} + \dots + a_{15}) \\ K_3 &: s + (a_6 + \dots + a_{10}) + (a_{11} + \dots + a_{15}) \end{aligned}$$

Ha a három kérdésre kapott választ összeadjuk, ismerni fogjuk $3s + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{15})$ értékét. Ennek az összegnek a paritása egyenlő s paritásával. Ha tehát az összeg páros, akkor Sári 14, egyébként pedig 15 éves. (4 pont)

..