

A végtelen a matematikában
(Meghibbessé és lehetetlen...)

ELTE TREBORT ÁGOSTON
Gyabroni Gimnázium

2025. 10. 17.

Dr. Nemeth József C. egyetemi tanár
SZTE TTK Analízis Tanszék
Bolyai Intézet

A végtelen a matematikában:

Ellentmondásos; vitatott, misztikus

”Sok képtelenség adódik a végtelen tagadásából is és elismeréséből is.” (Arisztotelesz, i.e. 384–322.) (A $\sqrt{2}$ nem szakaszos.)

”Mindig nagy falatnak tűnt” (Arkhimedes i.e. 300: π nem racionális)

”Megosztotta a matematikusokat” (Bolzano, 1781–1848) (Kell-e? Dobjuk el!)

”A végtelent legjobb elkerülni” (Galilei, 1564-1642)

”Ősidők óta semmi sem kavarja fel annyira az emberi értelmet, mint a végtelen kérdése” (Hilbert 1900 PÁRIZS; 23, 1)

Sokszor foglalkoztak már a végtelennel i.e. is. Pl. Euklides: végtelen sok prímszám van (nem így fogalmazta meg); ikerprímek is végtelen sokan vannak (100335 jegy; Csang; Tao). Később: Goldbach-sejtés (komputer); $3 \cdot 10^8$ -ig.

Példák (ellentmondások, meghökkentő dolgok a végtelent tekintve)

A.

a) Galilei-féle paradoxon:

$$1 \leftrightarrow 2$$

$$2 \leftrightarrow 4$$

$$3 \leftrightarrow 6$$

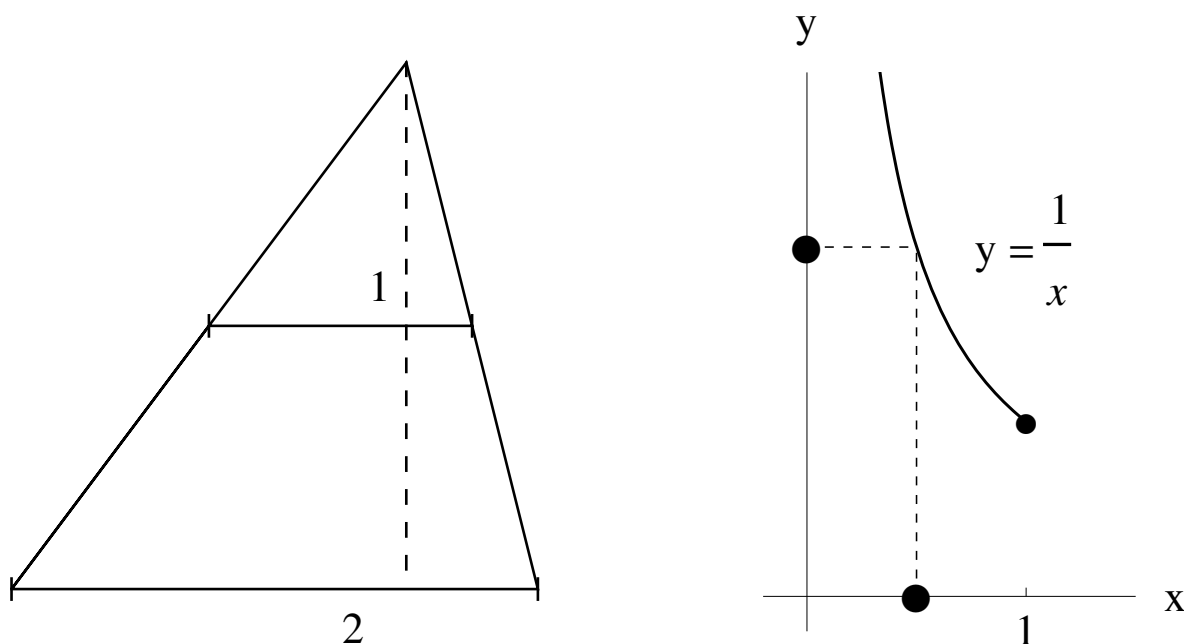
$$\vdots$$

(kölsönösen egyértelmű, akkor "ugyanannyi" elem, Kalmár-lovasok)

Paradoxon? Ellentmondás? Rész–egész régi felfogása? (Bolzano, 1781-1848; a rész $\neq$ egész).

AXIOMA: "Az egész nagyobb, mint a része."

b) vagy $[0; 1]$ és $[0; 2]$ példája $(x \rightarrow 2x)$



vagy $(-1; 1) \longleftrightarrow (-\infty; \infty)$, $y = \frac{x}{1 + |x|}$ vagy a $(0; 1) \longleftrightarrow$ egész számegeyenes összes pontja; azaz a $(0,1)$ intervallumnak annyi pontja van, mint az egész számegeyenesnek $[(-1; 1) \rightarrow (0; 2) \rightarrow (0; 1)]$.

Definíció: (ami "feloldja az ellentmondást", ami abból adódik, hogy a végesre igaz szabályokat akartuk a végtelenre "erőszakolni" (u.i.: a rész és egész problémáját)

Egy halmazt végtelen halmaznak nevezünk, ha van olyan valódi részhalmaza, amellyel a halmaz ekvivalens (azaz "ugyanannyi" pontja van).

(Ellenkező esetben *véges*.)

[Kihúztuk a "paradoxonok" méregfogát.] Ferdinand Ludwig Philipp Georg Cantor (1845-1918; német) nász-út; Dedekind; elismertség; depresszió; intézet.... (cikkeit sokszor visszavonta) (hallgatók — BOLYAI Intézet)

c) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ (természetes számok) Megszámlálhatóan végtelen halmaz; $\mathbb{Z}$ is ilyen.

d) $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$: racionális számok

A racionális számok "ugyanannyian" vannak, mint a természetes számok (azaz **Megszámlálhatóan** végtelen sokan vannak) (**Számosság**) (Pl. $(1/3; 1/2)$ -ben; Hihetetlen.).

Ábra: (kihagyni, ami már volt)

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots \end{array}$$

(innen a **negatívak** is és utána **az összes**) (örület).

Megjegyzés: Számpárok $(n, m) \Leftrightarrow (2^n \cdot 3^m)$; számhármak, szám n -esek, polinomok (egész e.h.); $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$;

e) Van-e olyan, aminek "több" pontja van, mint a *term. számok* (ill. racionális számok) (azaz *nem megszámlálható*) ("Végtelenek között nem lehet különbséget tenni." (Bolzano $\Leftrightarrow$ Dedekind))

Igen: **Valós számok** (CANTOR) (4 év)

Módszere: (a $(0; 1)$ intervallum összes (valós) pontjára)

Indirekt: (tegyük fel, hogy megsz., azaz sorrendbe szedhető)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, u_{11} u_{12} \dots \\ x_2 &= 0, u_{21} u_{22} \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, u_{n1} u_{n2} \dots u_{nn} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

(pl.: $0,5 = 0,499\dots$ -et vegyük)

Legyen $y = 0, v_1 v_2 v_3 \dots$, ahol legyen $v_n = 2$, ha $u_{nn} = 1$ és legyen $v_n = 1$, ahol $u_{nn} \neq 1$.

Ha pl. $y = x_n = 0, u_{n1} u_{n2} \dots \underline{\underline{u_{nn}}} \dots$ (Kerékjártó bizonyítása)

Elnevezés: *Kontinuum-számosságú* (valós számoké)
Cantor féle diagonális eljárás. (halmaz elm., informatika)

Problémák: Van-e a megszámlálható és a kontinuum között? (Kontinuum-hipotézis) (Hilbert 1. a 23-ból, "Senki sem űzhet ki bennünket abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtett nekünk." (D.H.))

Cantor: "A matematika lényege annak szabadságában van; sokkal hasznosabb a matematikai kérdések felvetése, mint a problémák megoldása." (Pl. Matek dogá.)

Gödel (1940): nem cáfolható; Cohen (1963): nem bizonyítható.

Megjegyzés: N, Q , Algebrai számok (ÁBRA); Lambert

(1741) a π irracionális; Lindemann (1882): a π transzcendens (def.; ezek vannak "sokan" ezek miatt nem megszámlálható a valós számok halmaza).

Kör négyszögesítése. $\sin r$, $\cos r$ transzcendens, ha $r \neq 0$ racionális.

Van-e a kontinuumnál nagyobb számosság? (Azaz van-e olyan halmaz, amelynek "több" eleme van, mint a valós számok.) Kronecker megjegyzése a XIX. sz.-ban. Pl: Cantor kérdése: A síknak az összes pontja ilyen-e? NEM.

g) A $(0,1)$ szakasznak ugyanannyi pontja van, mint az egységnégyzetnek, ill. az egész síknak, sőt az egész háromdimenziós térnek, azaz kontinuum. Módszer: $P = (0, a_1, a_2, a_3, \dots; 0, b_1, b_2, b_3, \dots) \leftrightarrow 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$.

Cantor: "Látom, de nem hiszem" Mit gondolt róla először? 3 évig "bizonyította" az ellenkezőjét; 1871-1874)

Az egységnégyzet és az egész sík közötti megfeleltetés triviális.

Tehát a síknak nincs több pontja, mint kontinuum (azaz valós számoké)

h) Van-e a kontinuumnál nagyobb számosságú halmaz

α) Polinomok (megszámlálható) (egész eh.)

β) Folytonos függvények (kontinuum)

δ) Az összes függvény (kar. függvény); a valós számok összes részhalmazának a halmaza nagyobb számosságú, mint a kontinuum. (Cantor tétele.)

γ) Természetes számok összes részhalmaza (kontinuum)

B. Végtelen összegek

Bevezetés:

α) CSOKI

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

β)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots = ? \quad (\text{TORTA})$$

Vagy:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = A/ \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{A}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

De

γ)

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots = A/ \cdot 2 \\ 2^2 + 2^3 + \cdots = 2A \end{array} \right\} \Rightarrow A = -2??$$

Mit szabad? Mit nem szabad? 0, 13?

Kiemelendő (Leibniz-féle sor)

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \\ \beta) 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ az összeg.}$$

$$\gamma) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ (végtelen osztással)}$$

$$\text{(Euklides és Arkhimedes már ismerte)} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Megjegyzés:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1-x}{1-x^3} = \\ &= (1-x)(1+x^3+x^6+x^9+\dots) = \\ &= 1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+\dots \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{3} &= 1-1+1-1+1-1\dots \end{aligned}$$

Mi hiányzik (MINT EGY FALAT KENYÉR) ebben a káoszban?

CAUCHY (1789–1857) (Plüss maci)

Definíció: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $s_n = a_1 + \dots + a_n$; ha $s_n \rightarrow s$ (véges),

akkor a sor konvergens, és összege s , azaz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$;
ellenkező esetben a sor divergens (nincs összege).

Eldőlt: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$; $s_{2n} = 0$; $s_{2n+1} = 1 \Rightarrow$
DIV. (nincs összeg; végesben ilyen nincs)

Végtelen mértani sor: $a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots = \frac{a}{1-q}$, ha

$$|q| < 1. \quad \left(s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

”CSOKI” $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 1$, hiszen $s_n \rightarrow 1$, mert $s_n =$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(1/2)^n - 1}{1/2 - 1} \text{ (végtelen mértani sor)}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{2} \text{ (ez is mértani sor)}$$

$2 + 2^2 + 2^3 + \dots$ divergens, hiszen $s_n \rightarrow \infty$

$$0,1\dot{3} = \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^4} + \dots = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{13}{99}.$$

VIGYÁZAT (új minőség, ne erőszakoljuk rá a végesre érvényes szabályokat; Hegel)

Példák (elrettentő)

$$1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = A \approx 0,6931\dots \text{ (Leibniz), de}$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2}A \text{ (átrendezés)}$$

Megoldás.

Írjuk ki részletesen a sor első néhány tagját:

$$(24) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = A.$$

Vegyük a következő sort, amelynek összege megegyezik

az előzővel:

$$(25) \quad 0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + \dots = A.$$

Szorozzuk be a (25) alatti sort tagonként $\frac{1}{2}$ -del:

$$(26) \quad 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2}A,$$

majd adjuk össze tagonként a (24) és (26) sorokat:

$$(27) \quad 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2}A.$$

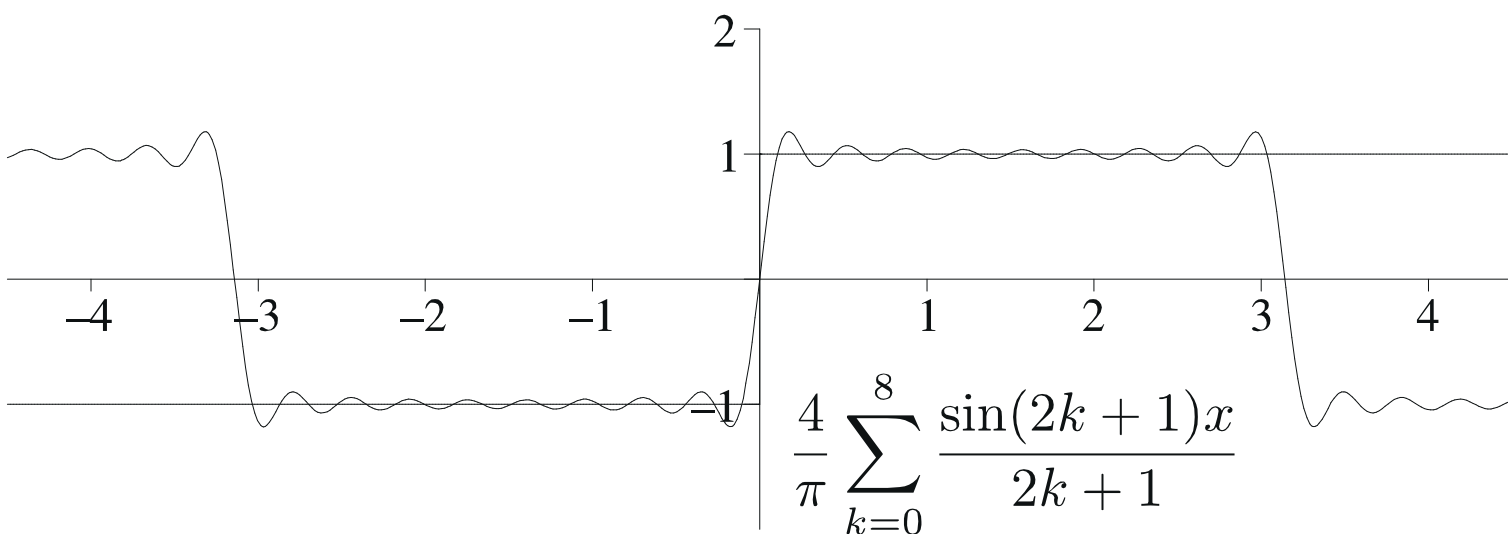
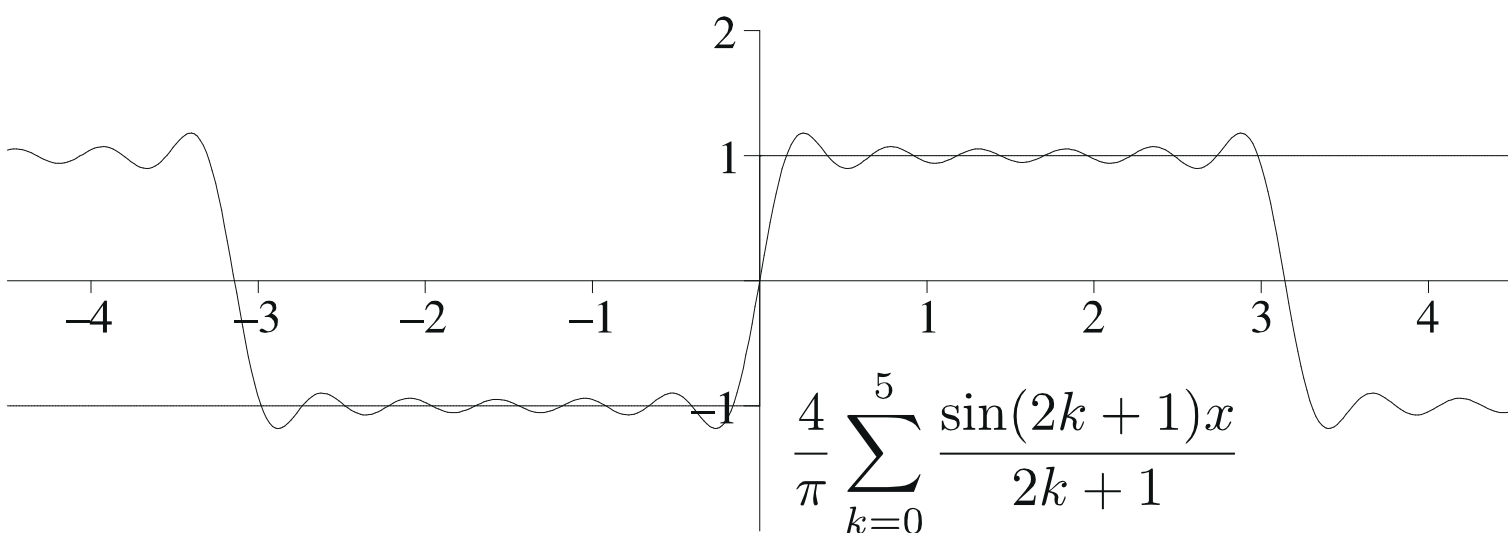
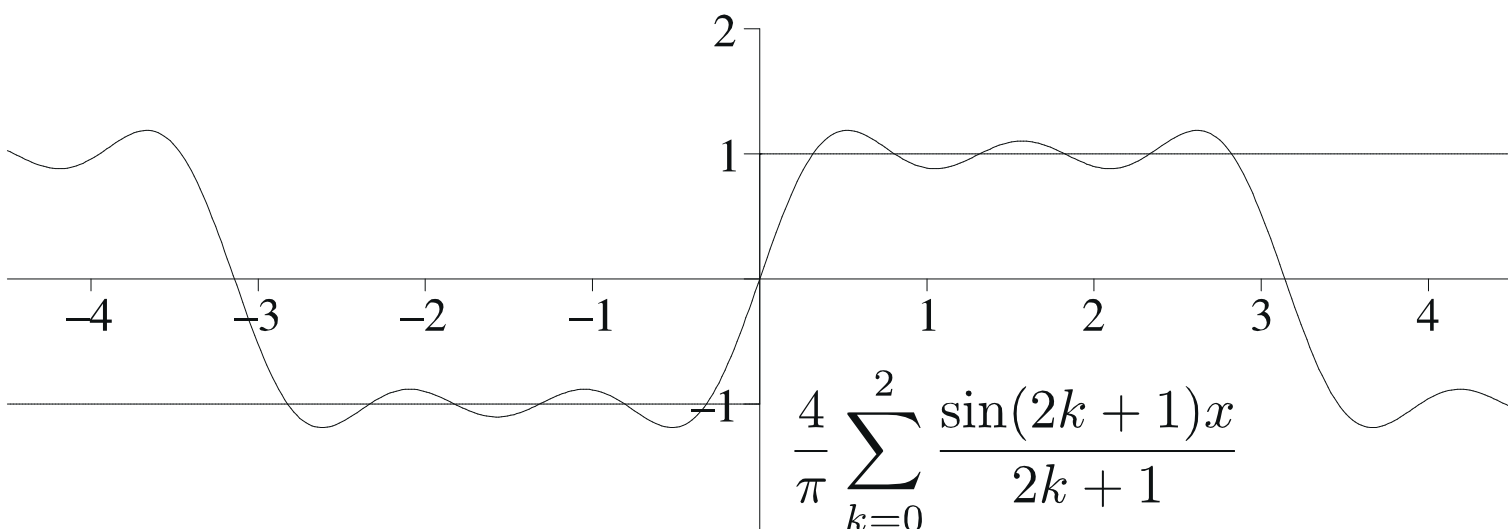
Ez utóbbi sornak nyilván ugyanannyi az összege, mint a következőnek:

$$(28) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2}A.$$

Világos, hogy a (28)-as sor a (24)-nek olyan átrendezése, ahol két pozitív előjelű tagot követ egy negatív, majd ismét két pozitív, egy negatív és így tovább, tehát megadtunk egy kívánt átrendezést.

2) **Csoportosítás** (vagy zárójelezés) ld. $1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ (de ha konv., akkor bármely csoportosított sor konvergens és összege ugyanannyi)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \quad (\text{hővezetési probléma})$$



1. ábra

Megjegyzés: Fourier (1768–1850) $\operatorname{sgn} x$ a szinuszok összege; Cauchy hibás bizonyítás.

Gyógyír mindenre: Egyenletes konvergencia (Weierstrass (1815–1897); Abel (1802–1829) pl. hatványsorok – ld. polinomok) (Weierstrass: sör, vívás, tanítás)

C. PÉLDÁK (Könyv)

a) Mértani sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q} \Leftrightarrow |q| < 1.$$

Pl.

$$0, \dot{1}\dot{3} = \frac{13}{100} + \frac{13}{10^4} + \dots = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{13}{99}.$$

Pl. $0, \dot{9}; 0, \dot{1}$.

Kérdés marad (9. o.)

$$\left. \begin{array}{l} A = 0, 1313\dots \\ 100A = 13, 1313\dots \end{array} \right\} \Rightarrow 99A = 13 \Rightarrow A = \frac{13}{99}.$$

$\sum c a_n \stackrel{?}{=} c \sum a_n$ és $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ (Mindkettő **OK** + *konvergens* a sor.) (Nincs több u.a.)

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots = 2$$

Megoldás. Írjuk fel a sort részletesen:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$$

Bontsuk fel a sort a következőképpen:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{2^3} & + & \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 \\ & & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{2^3} & + & \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2^3} & + & \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2^2} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & \vdots \end{array}$$

A fenti sorok mind mértani sorok, így könnyen adódtak az eddigiek alapján az egyenlőségek jobb oldalán szereplő számok. Ha tekintjük a jobb oldali oszlop elemeit, azok a következő végtelen sort adják:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

hiszen ez egy $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$ paraméterekkel rendelkező mértani sor. Tehát a kérdéses sor konvergens, és összege: 2.

Megjegyzés. I.) Fizika

$$\frac{60}{2} + \frac{2 \cdot 60}{2^2} + \frac{3 \cdot 60}{2^3} + \cdots + \frac{n \cdot 60}{2^n} + \cdots = 120,$$

azaz ...

II.) Val.sz. (várható érték)

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \text{ (harmonikus sor)}$$

Lassú

Pl.

$$s_{83} > 5; \quad s_{12367} > 10; \quad s_{36 \cdot 10^6} > 18 \quad (\text{Jani bácsi}) \quad (2\text{-}2 \text{ év})$$

Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens.

Megoldás. Tekintsük a sor 2^n -edik részletösszegét:

(2)

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} + \\ + \dots + \frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Csökkentsük a (2) összeget úgy, hogy az $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ helyett $2 \cdot \frac{1}{4}$ -et, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ helyett $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ -et írunk, $\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}$ helyett $8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$ -et, és így tovább, az utolsó "blokkban" szereplő $\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}$ helyett $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$ -et vegyünk.

Így azt kapjuk, hogy $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, amiből látszik, hogy bármely K számhoz megadható olyan n_0 , hogy ha $n > n_0$, akkor $s_{2^n} \geq K$ (ugyanis elég olyan n_0 -t venni, amelyre $1 + \frac{n_0}{2} > K$, azaz $n_0 > (K - 1) \cdot 2$).

Ez definíció szerint azt jelenti, hogy $s_{2^n} \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$, amiből az s_n sorozat monoton növekedése miatt az adódik, hogy $s_n \rightarrow \infty$, tehát a sor valóban divergens.

d) Az s_n viselkedése (Kürschák; 1900 körül)

Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$, akkor az s_n nem egész szám. (H.F.; + KÖNYV)

e) $\sum_{9 \nmid n}^{\infty} \frac{1}{n}$ viselkedése (elhagyjuk azokat a tagokat, amelyekben szerepel a 9-es számjegy; Kempner-féle sor).

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{9 \nmid n}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor konvergens. (H.F.)

f) Általános iskolai versenypélda.

Határozzuk meg annak a sornak az összegét, amelyet úgy kapunk, hogy a harmonikus sornak csak azon tagjait hagyjuk meg, amelyek véges tizedes tört alakban írhatók. (H.F.; KÖNYV)

g*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

Megoldás. (+5 megoldás a könyvben)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Integráljuk tagonként (!!?)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Mivel ez a hatványsor az $x = 1$ helyen az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergens sort adja (ld. Leibniz-kritérium), ezért Abel tétele (!!)) szerint az összegfüggvény folytonos a $[0; 1]$ -on, azaz az $x = 1$ helyen az összegfüggvény csak $\ln(1 + 1) = \ln 2$ lehet. (ÁBRA kell)

h)

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}.$$

i) Egy újabb érdekes összeg (az előző "folytatása")

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln \sqrt[3]{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(ld. könyv 130. o.)

j) (Ságvári – bocsánat!!!) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ sor problémája. A sor konvergens; összege $\frac{\pi - 1}{2}$ (ld. KÖNYV)

További kérdés:

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} n}{n}$ sor konvergens-e?

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} n}{n}$ sor divergens. $\left(\frac{\operatorname{tg} n}{n} \not\rightarrow 0 \right)$. Pl. $\frac{\operatorname{tg} n}{n^2} \rightarrow 0$

nyitott; sőt $\frac{\operatorname{tg} n}{n^8} \rightarrow 0$ is.

l) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor problémája. (Legkedvesebb sorom.)

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

1. megoldás. Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$(2) \quad s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n},$$

majd az egyes tagokat bontsuk fel törtek különbségére az alábbi módon:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \cdots, \quad \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

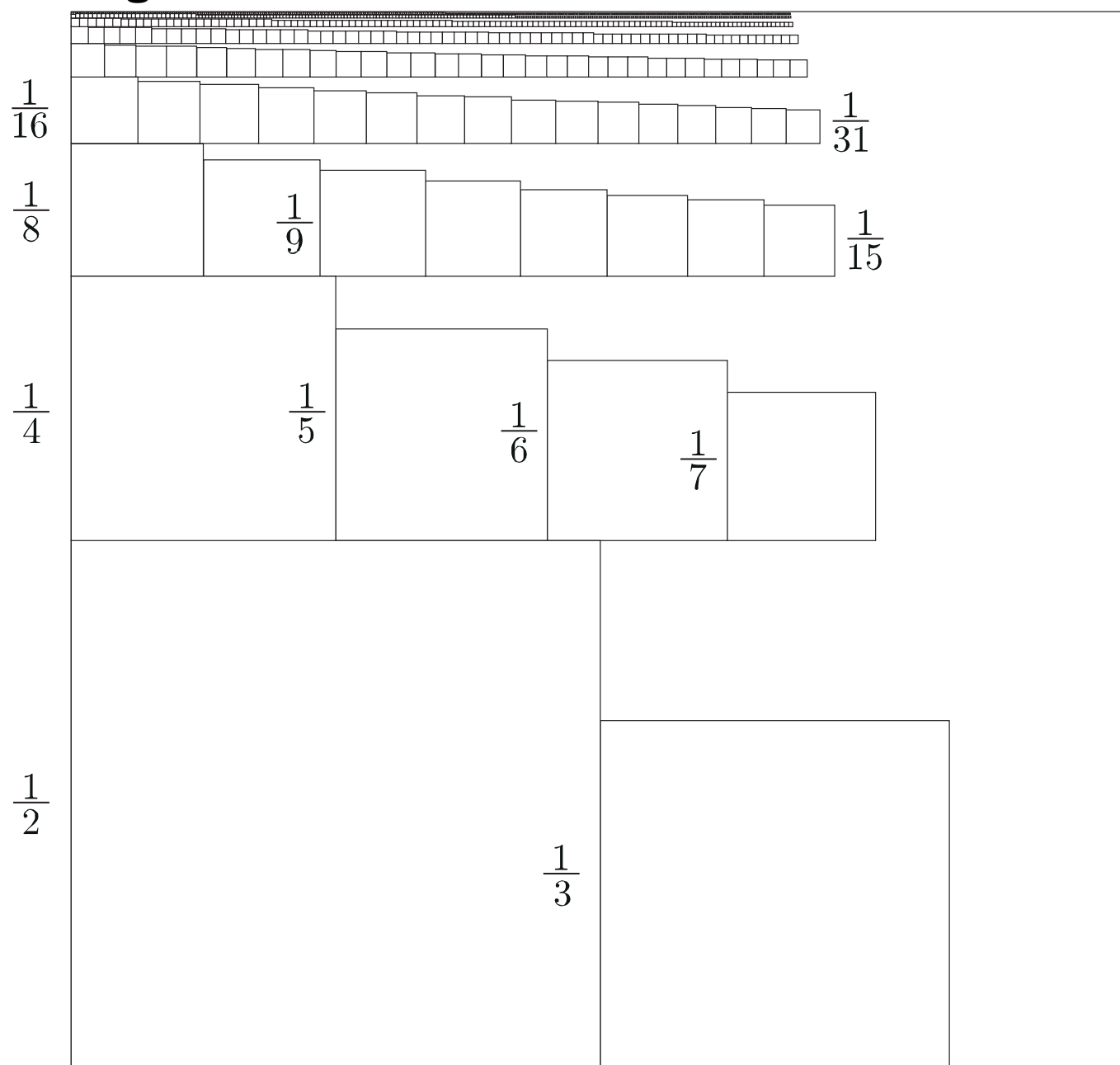
Így (2) jobb oldala helyett az írható, hogy

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n},$$

hiszen a közbülső tagok kiesnek, ugyanis ez egy teleszkópikus összeg. Azt kapjuk, hogy

$$s_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

tehát a részletösszegek sorozata korlátos, és mivel s_n monoton növekvő, ezért konvergens is, tehát az (1) sor valóban konvergens, sőt, összege nem nagyobb 2-nél.

2. megoldás.

Megjegyzés. Egy szép alkalmazás (analízis – számelmélet – valószínűség) (Könyvem 50. oldal)

Kérdés: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$ (1644 Pietro Magnoli; Baseli probléma).

Euler 1734; 1744. (100 éves probléma)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{100} = 1,54977$$

$$1 + \frac{1}{2^2} - \cdots + \frac{1}{10^4} = 1,63498$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = 1,64493406684822643647$$

(A $\frac{\pi^2}{6}$ -nak is ez az első 21 jegye!!!; *memória*) + 10 év (Jacob Bernoulli: bárcsak a bátyám...) (Csészék, villamos; mentő; szőnyeg; torta.)

További összegek (Euler)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{2^0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{1} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{2^2}{5!} \frac{1}{3} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{2^4}{7!} \frac{1}{3} \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \cdots = \frac{2^6}{9!} \frac{3}{5} \pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \cdots = \frac{2^8}{11!} \frac{5}{3} \pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \cdots = \frac{2^{10}}{13!} \frac{691}{105} \pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \cdots = \frac{2^{12}}{15!} \frac{35}{1} \pi^{14}$$

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^{16}} + \dots &= \frac{2^{14}}{17!} \frac{3617}{15} \pi^{16} \\
1 + \frac{1}{2^{18}} + \dots &= \frac{2^{16}}{19!} \frac{43867}{21} \pi^{18} \\
1 + \frac{1}{2^{20}} + \dots &= \frac{2^{18}}{21!} \frac{1222277}{55} \pi^{20} \\
1 + \frac{1}{2^{22}} + \dots &= \frac{2^{20}}{23!} \frac{854513}{3} \pi^{22} \\
1 + \frac{1}{2^{24}} + \dots &= \frac{2^{22}}{25!} \frac{1181820455}{273} \pi^{24} \\
1 + \frac{1}{2^{26}} + \dots &= \frac{2^{24}}{27!} \frac{76977927}{1} \pi^{26}
\end{aligned}$$

Megjegyzés. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; Apery (irracionális) (sejtés: $\frac{\pi^3}{?}$); Euler.

n) A prímszámok reciprok-sora.

A természetes számok és a négyzetszámok reciprokaiból álló sorokhoz hasonlóan érdekes annak a vizsgálata is, hogy vajon a *prímszámok* reciprokaiból álló sor konvergens-e vagy divergens. Azaz, ha $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ jelenti a prímszámok nagyság szerint rendezett sorozatát, akkor a

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$$

o) Egy csodálatosan szép példa.

Mutassuk meg, hogy van két olyan szomszédos négyzet-szám, amelyek közé legalább 10^6 db prímszám esik. (10^6 helyett bármilyen nagy szám lehet.)

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz minden n természetes szám esetén n^2 és $(n+1)^2$ közé kevesebb, mint 10^6 db prímszám esik.

Jelölje $p_1^{(n)}, \dots, p_{s_n}^{(n)}$ ezeket a prímszámokat. Ekkor tehát $s_n < 10^6$ teljesül minden n esetén. Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\frac{10^6}{n^2} > \frac{1}{p_1^{(n)}} + \frac{1}{p_2^{(n)}} + \dots + \frac{1}{p_{s_n}^{(n)}}.$$

Viszont, ha mindkét oldalt összegezzük, adódik, hogy

$$10^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

ahol a jobb oldali összegben az összes prímszám reciproka összege van. Ez nyilvánvaló, hogy ellentmondás, mert a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ sor pedig divergens.

A HASZNOSSÁG

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$ Hogyan? (Előre adott pontossággal.)

Newton (XVII. sz.) (binomiális sor)

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

(minél több tag, annál több tizedesjegy adódik; akárhány – ez a végtelen sor haszna, ez benne a gyönyörű).

”akárhány” ez csak a végtelen lehet

Pl. 2006-ban Kondo: $200 \cdot 10^9$ tagig (13 nap 14 óra gépen) Hogyan?

$\pi = 3,141592653\dots$ Ludolf von Ceulen (≈ 1600) 35 jegy; SÍRKŐ 2^{62} oldalú szabályos sokszöggel. Jelenleg $62 \cdot 10^{12}$ jegy (2021) Svájc; 109 napig futott a program.

Legújabb (2014.03.14.) $105 \cdot 10^{18}$ jegyig (de nincs hitelesítve még).

Megjegyzés. Rajveer Meena (2015; 70000; 9 ó 27’)

Kérdés. Miért kell néha sok tizedesjegy a π -ből?

Pl. Mars szonda 103.522 km eltérés, ha $\pi = 3,14$ vagy $\pi = 3,14\dots$ (31 jegy). Ez a Hold–Föld táv. harmada.
Ad π) Madhava; Nilakhanta; Leibniz; James Gregory (XV.-XVII. sz.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \text{ ha } |x| < 1; \text{ Abel- tétel.} \end{aligned}$$

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right); \text{Newton}$$

Lassú, de szép. Pl.: $2 \cdot 10^6$ tag 6 jegy; $2 \cdot 10^{12}$ tag 12 jegy. Bármilyen pontosság, mivel végtelen sok tagunk van; ez gyönyörű!!! SOROK!!!

i.e.	2000	(<i>B</i>)	3, 125
		(<i>E</i>)	3, 16
	250	(<i>A</i>)	3, 1418
i.sz.	263	:	5 tizedesjegy
	480	:	7
	1429	:	14
	1610	:	35
	1719	:	112
	1847	:	152
	1874	:	527
	1973	:	1 001 250
	2002	:	1 240 000 000 000
	2010	:	5 000 000 000 000
	2021	:	$62 \cdot 10^{12}$
	2024	:	$105 \cdot 10^{18}$

A továbbiakban bizonyítás nélkül sorolunk fel néhány érdekes előállítást (a szerzővel és évszámmal együtt).

FRANÇOIS VIÈTE (kb. 1579):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

JOHN WALLIS (kb. 1650):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}.$$

WILLIAM BROUNCKER (kb. 1650):

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \cdots}}}}.$$

MADHAVA, JAMES GREGORY, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1450–1671):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

ISAAC NEWTON (kb. 1666):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \cdots \right).$$

SRINIVASA RAMANUJAN (1914):

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}.$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{[1103 + 26390n]}{396^{4n}}.$$

DAVID CHUDNOVSKY és GREGORY CHUDNOVSKY (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{13591409 + n 545140134}{(640320^3)^{n+1/2}}.$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 15 újabb pontos jegyét adja π -nek.)

JONATHAN BORWEIN és PETER BORWEIN (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{(A + nB)}{C^{n+1/2}},$$

ahol

$$A := 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365$$

$$B := 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750$$

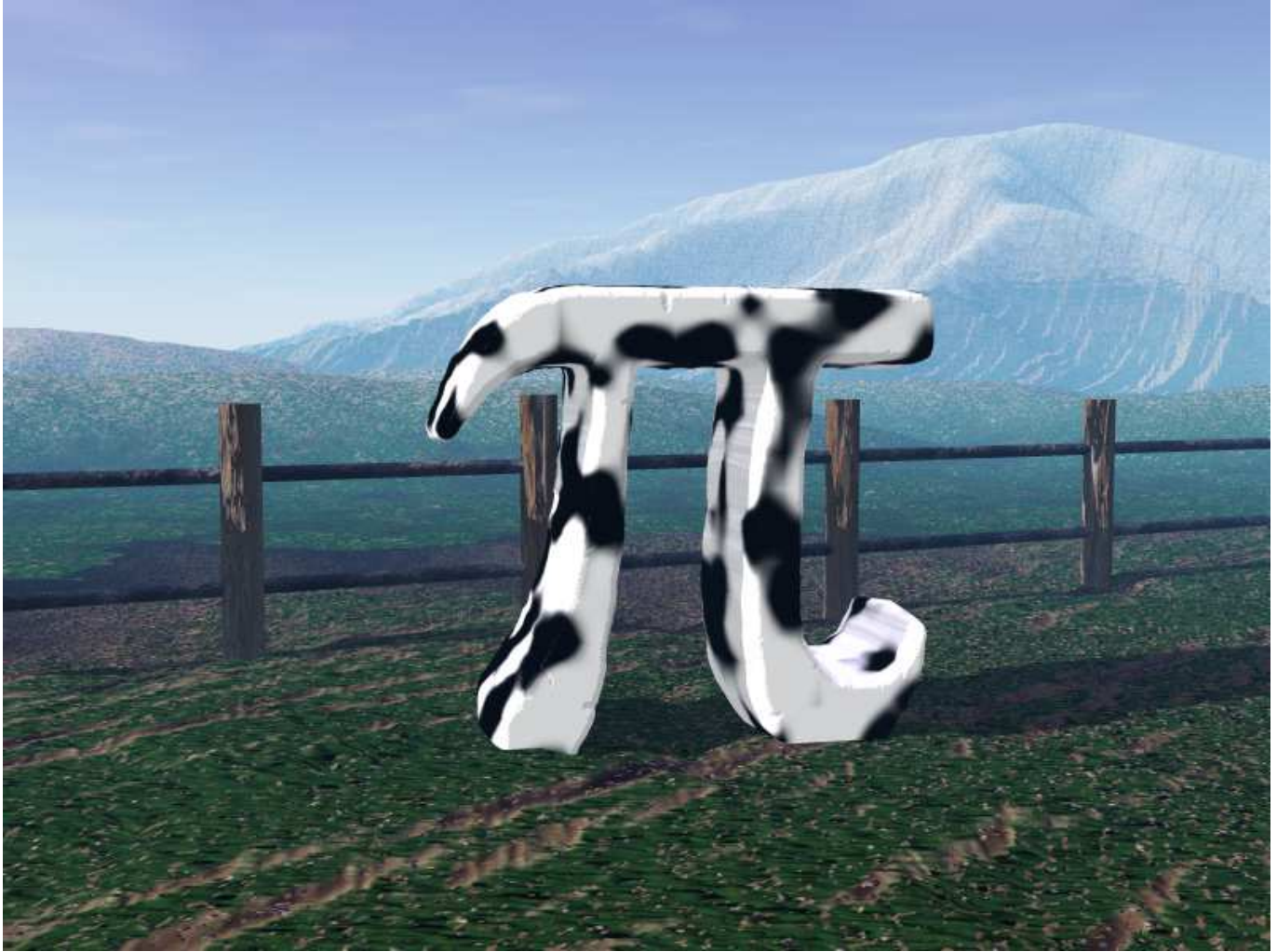
$$C := [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3.$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 31 újabb pontos jegyét adja π -nek.)

DAVID BAILEY, PETER BORWEIN és SIMON PLOUFFE (1996):

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right).$$

Egyik legelfogadottabb ma a π jegyeinek kiszámítására.



Egy porszem virágot terem,
S egy szál vadvirág az eget,
Fogd föl tenyeredbe a végtelent,
S egy perc alatt élj évezredet.

(W. Blake)





I. Tétel: A valós számok halmaza nem megszámlálható!

Bizonyítás:

A $0 \leq x < 1$ fejtételnek eleget tevő valós számok halmaza meg nem számlálható voltának fenti bizonyítását KERÉKJÁRTÓ BÉLA magyar matematikus nyomán a következő geometriai formába önthetjük.

Tegyük fel ismét, hogy a valós számok elrendezhetőek valamely $x_1, x_2, x_3, \dots$ sorozatba. Osszuk fel a $(0,1)$ intervallumot 10 egyenlő részre; minden részintervallumhoz számítsuk hozzá bal végpontját, jobb végpontját ne. Válasszunk a részintervallumok közül olyat, amelyikben nincs benne az x_1 , de ne az utolsót. Osszuk ezt a részintervallumot ismét 10 egyenlő részre és válasszunk a keletkező részintervallumok közül olyat, de ne a legutolsót, amelyben nincs benne az x_2 . Ezt ismét osszuk 10 egyenlő részre és a keletkező részeki közül válasszunk olyat, de ne a legutolsót, amelyben nincs benne az x_3 , és így tovább... Az így kapott, egymásba skatulyázott, intervallumok x közös pontja nincs benne az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sorozatban; pl: x_n -től azért különbözik, mert az n -edik felosztásnál más intervallumba esik, mint az x_n .

Cantor
ax.

Megjegyzés: Az egyes bizonyításokat (részintervallumok) jelöljük: $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$

Ebből egyrészt $x_1 \notin U_1, x_2 \notin U_2, \dots, x_n \notin U_n$ és

másképp $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \dots \supset U_n \supset \dots$

A folytonos függvények halmazaának számossága

A H halmaz részhalmazait karakterisztikus függvényeikkel jellemezve, a fenti tétel úgy is megfogalmazható, hogy a H halmazon értelmezett függvények közül azok, amelyek csak a 0 és az 1 értékeket vehetik fel, H -nál nagyobb számosságú függvényhalmazt alkotnak. Annál inkább érvényes az, hogy a H halmazon értelmezett összes függvények halmazának számossága nagyobb a H -énál. Pl. az intervallumon értelmezett összes függvények számossága nagyobb a kontinuuménál.

Ezzel szemben az (a, b) intervallumon értelmezett folytonos függvények F halmazának számossága egyenlő a kontinuuméval.

Elég azt megmutatnunk, hogy a) a kontinuum ekvivalens F egy részhalmazával, b) F ekvivalens a kontinuum egy részhalmazával.

Az a) állítás nyilvánvaló: minden valós c számnak feleltessük meg pl. azt a függvényt, amely állandóan c -vel egyenlő. A b) állítás bizonyítására először is azt jegyezzük meg, hogy egy folytonos függvény meg van határozva azáltal, hogy értékeit egy mindenütt sűrű halmazon, pl. a racionális pontokban megadjuk. Az (a, b) intervallum racionális pontjait egy $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ sorozatba szedve, az $f(x)$ folytonos függvényt tehát egyértelműen meghatározza az

$$y_n = f(r_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

számsorozat, és ennél fogva az

$$\eta_n = \left(1 + \frac{y_n}{1 + |y_n|}\right) / 2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

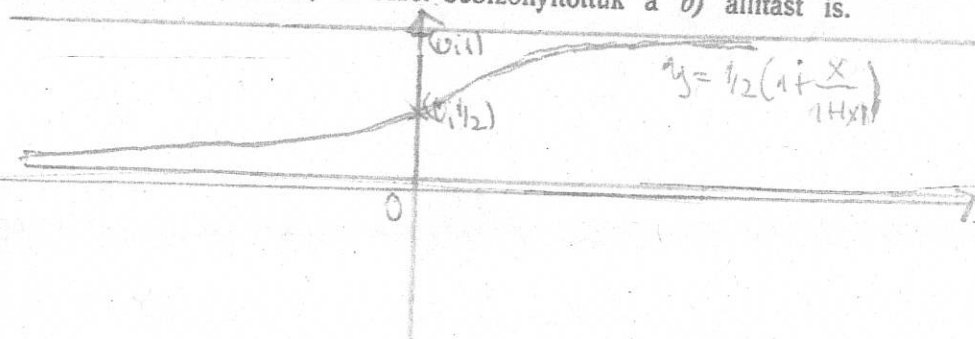
számsorozat is; utóbbi csupa 0 és 1 között levő valós számokból áll. Legyen

$$\eta_n = 0, u_{n1} u_{n2} \dots$$

az η_n végtelen tizedes tört kifejtése (véges tizedes törtek esetében is a végtelen kifejezést használva), és rendeljük hozzá az $\{\eta_n\}$ sorozathoz a

$$c = 0, (u_{11}) (u_{12} u_{21}) (u_{13} u_{22} u_{31}) (u_{14} u_{23} u_{32} u_{41}) \dots$$

valós számot (a zárójelekkel csak azt jelezük, hogy az u_{ik} számjegyek milyen szabály szerint irandók egymás után). Ezzel minden $f(x)$ folytonos függvényhez egy c valós számot rendeltünk hozzá, mégpedig különböző függvényekhez különböző számokat, és ezzel bebizonyítottuk a b) állítást is.



III.

Bizonyítás-vázlat

Tétel: A termésetes számok halmaza
natúrnyálkalmaz (összes rísthalmazok halmaza)
kontinuum számosságú.

Segídtétel Minden $x \in (0,1)$ valós szám előáll.

(Biz. nélkül) a következő "diadikus" felbontás formájában: $(2 \rightarrow 10, \text{ahol } \varepsilon_i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$

$$X = \frac{\varepsilon_1}{2^1} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \frac{\varepsilon_3}{2^3} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}, \text{ ahol az}$$

$\{\varepsilon_n\}$ sorozat tagjai: 0 vagy 1. (ld. 2-es számrendszer)

Ezer után legyen pl. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ a 3-mal osztható pozitív egészek halmaza mint a természetes számok halmaza egy részhalmaza.

$$\text{Legyen } \alpha = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots + \frac{1}{2^{3n}} + \dots = \frac{1}{7} \text{ (mértani sor)}$$

Meg ez egy $A \leftrightarrow \alpha$ hozzárendelés.

Átszámolás:

$$N \supseteq A \leftrightarrow \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}, \text{ ahol } \varepsilon_n \text{ vagy 1 vagy 0, attól}$$

függően, hogy $n \in A$ vagy $n \notin A$.

Megj.: Ez egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés a $\alpha \in (0,1)$ számok és a natúrnyálkalmaz elemei között, ami bizonyítja, hogy a natúrnyálkalmaz számossága: kontinuum.

Pl. Pár számok halmazához: $\alpha = 1/3$

Páratlan számok halmazához: $\alpha = 2/3$

IV. CSOPORTOSÍTÁS, ZÁRÓJELE ZÉR

Tétel Van olyan végtelen sor, amelyre igaz, hogy tesztölges
 d valós számhoz van a sorhoz olyan zárójelre, amely összeg: d .

Legyen $\{r_n\}$ a racionális számok egy olyan sorozatba
rendezése amelyre $r_0 = 0$

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (r_n - r_{n-1})$ sor megfelel a d alatti feltételnek

Bjt. (HF???) Stabod a gátda? (Vagy inkább infekt??) Emellett kell
Kalcsuk I.

Tesztölges A valós számhoz van A -hoz tartó

é, különböző r_{n_k} racionális számokból álló sorozat, $[r_{n_k} \rightarrow A]$,

A sorozat átlendeközével elérhető, vagy

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

Ekkor a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} (r_n - r_{n-1}) \right)$ zárójelre, k -adik
 $n_{k-1} \leq n_k - 1$

rendeltőssége r_{n_k} . Mivel $r_{n_k} \rightarrow A$, ha $k \rightarrow \infty$, ezért

a zárójelre sor konvergen és az összege A .