

I. VALÓS SZÁMOK, NÉGYZETGYÖK

Racionális és irracionális számok

1. Írjuk fel tizedes tört alakban a következő számokat!

$$\frac{21}{8} \quad \frac{37}{16} \quad \frac{29}{6} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{5}{11} \qquad \frac{10}{7} \quad \frac{20}{13} \quad \frac{5}{17}$$

2. Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő tizedes törteket!

$$0,764 \quad 2,1973 \quad 2,5 \quad 4,1\overline{7} \qquad 0,7\overline{64} \quad 0,76\overline{4} \quad 0,76\overline{4} \quad 3,153\overline{4}$$

3. Az egység hosszúságú szakasz ismeretében hogyan lehet megszerkeszteni a következő hosszúságú szakaszokat? $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{15}$ $\sqrt{24}$

4. Adjunk meg négy olyan irracionális számot, amelyek csak az 1, 2 és 3 számjegyeket tartalmazzák, és értékük a) 1 és 2 között van, b) 10 és 20 között van, c) nagyobb 30-nál!

5. Számoljuk ki, hogy milyen számjegy áll a következő törték tizedes tört alakjában a tizedes vessző után a 2009-dik helyen! $\frac{41}{16}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{13}{6}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{25}{7}$

6. Adjunk meg három racionális és két irracionális számot, melyek 5,99 és 6 között vannak!

7. Keressünk eljárást, amelynek segítségével $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{4}$ között akárhány racionális számot elhelyezhetünk.

8. Jelöljük a számegyenesen egy $\frac{a}{b}$ törtszámot. Melyik a számegyenesen az $\frac{a}{b}$ után következő első racionális szám? Azaz melyik a legkisebb az $\frac{a}{b}$ -nél nagyobb racionális számok között?

9. Melyik a legkisebb pozitív racionális szám?

10. Az összes természetes szám egymás után írásával keletkező szám lehet-e szakaszos tizedes tört?
0,1234567891011121314 ...

11. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{3}$ irracionális szám.

Műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel

12. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\sqrt{100 \cdot 49} \quad \sqrt{81 \cdot 400} \quad \sqrt{121 \cdot 64} \quad \sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49}} \quad \sqrt{144 \cdot 36 \cdot 4} \quad \sqrt{121 \cdot 0,49}$$

13. Vigyük ki a gyökjel elé, amit lehet!

$$\sqrt{12} \quad \sqrt{27} \quad \sqrt{54} \quad \sqrt{75} \quad \sqrt{162} \quad \sqrt{108}$$

14. A gyökvonás elvégzése nélkül állapítsuk meg, a kettő közül melyik szám nagyobb!

$$3\sqrt{5} \quad \sqrt{20} \qquad 4\sqrt{5} \quad \sqrt{80} \qquad 4\sqrt{8} \quad 8\sqrt{2} \qquad 3\sqrt{2} \quad 5\sqrt{0,5}$$

15. Vigyük be a gyökjel alá a gyökjel előtt álló számot! $3\sqrt{2}$ $4\sqrt{5}$ $2\sqrt{6}$ $1,2\sqrt{2}$

$$3\sqrt{\frac{2}{3}} \quad 7\sqrt{\frac{2}{7}} \quad 5\sqrt{\frac{3}{7}} \quad 3\sqrt{x} \quad 5\sqrt{a} \quad 7\sqrt{b} \quad x\sqrt{2} \quad a\sqrt{a} \quad b\sqrt{b^2} \quad x^2\sqrt{x} \quad x\sqrt{x^3}$$

16. Végezzük el a következő műveleteket! $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt{48}$

$$3\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{200} \quad 2\sqrt{72} - \sqrt{50} - 2\sqrt{8} \quad \sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{45}$$

17. Írjuk egyszerűbb alakban a következő szorzatokat!

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{72} \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{125} \quad \sqrt{30} \cdot \sqrt{20} \quad \sqrt{50} \cdot \sqrt{125} \quad \sqrt{20} \cdot \sqrt{72} \quad \sqrt{15} \cdot \sqrt{32}$$

18. Végezzük el a következő műveleteket!

$$(\sqrt{2} + 3\sqrt{18} + 9\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2} \quad (\sqrt{108} + \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3} \quad (4\sqrt{18} - 5\sqrt{50} + 3\sqrt{98}) \cdot 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7}) \quad (5 - 3\sqrt{2}) \cdot (5 + 3\sqrt{2}) \quad (\sqrt{32} - \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{32} + \sqrt{12})$$

$$(4\sqrt{3} + \sqrt{54}) \cdot (3\sqrt{6} - 4\sqrt{3}) \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{18} - \sqrt{3}) \quad \sqrt{7 + \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{13}}$$

$$\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$$

19. Végezzük el a következő műveleteket!

$$12\sqrt{2} : 4 \quad 15\sqrt{5} : 5 \quad 6\sqrt{2} : 2\sqrt{5} \quad \sqrt{10} : \sqrt{5} \quad 2\sqrt{15} : \sqrt{5} \quad \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$$

20. Alakítsuk szorzattá! $\sqrt{6} + \sqrt{3} \quad \sqrt{42} - \sqrt{3} \quad \sqrt{21} + \sqrt{28} \quad \sqrt{40} - \sqrt{30} + \sqrt{20}$

21. Végezzük el a következő hatványozásokat!

$$(\sqrt{5})^2 \quad (2\sqrt{3})^2 \quad (5\sqrt{2})^2 \quad \left(\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)^2 \quad (\sqrt{2} + 1)^2 \quad (\sqrt{5} - 1)^2 \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \quad (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$$

$$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})^2 \quad (\sqrt{12} - \sqrt{3})^2 \quad (\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}})^2 \quad (\sqrt{2 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{2 - 2\sqrt{3}})^2$$

$$(\sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{7}} - \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{7}})^2 \quad (\sqrt{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}})^2$$

22. Igazoljuk a következő egyenlőségeket!

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2} \quad \sqrt{17 - 4\sqrt{15}} = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \quad \sqrt{30(4 - \sqrt{15})} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$$

23. Gyöktelenítsük a törtek nevezőjét!

$$\frac{8}{\sqrt{2}} \quad \frac{12}{\sqrt{6}} \quad \frac{5}{\sqrt{10}} \quad \frac{7}{\sqrt{7}} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad \frac{12}{7\sqrt{3}} \quad \frac{35}{4\sqrt{7}} \quad \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \quad \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

24. Gyöktelenítsük a törtek nevezőjét!

$$\frac{2}{2 + \sqrt{2}} \quad \frac{9}{\sqrt{19} - 4} \quad \frac{12}{5 - \sqrt{17}} \quad \frac{28}{\sqrt{5} - 1} \quad \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \quad \frac{6}{2\sqrt{3} - 3}$$

25. Végezzük el a következő műveleteket! $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+3)^2}$ $\sqrt{\frac{1}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}}$

26. Add meg a kifejezések értelmezési tartományát!

$$\sqrt{2x-1} \quad \sqrt{2x-1} \quad \sqrt{-x} \quad \sqrt{6-4x} \quad \sqrt{2x-3} + \sqrt{1-x} \quad \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3}$$

27. Végezzük el a következő műveleteket! $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$ $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5^3} \quad \frac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{7^5}} \quad \frac{(\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3})^3} \quad \sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{2})$$

28. A gyökvonás elvégzése nélkül állapítsuk meg, melyik szám nagyobb a kettő közül!

$$5 \cdot \sqrt{10} \quad \sqrt{15} \cdot \sqrt{3} \quad \sqrt{11} \cdot \sqrt{7} \quad \sqrt{6} \cdot \sqrt{13} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \quad \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \quad \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{7}} \quad \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{50}} \quad \frac{\sqrt{184}}{\sqrt{8}}$$

29. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\sqrt{5-\sqrt{21}} \cdot \sqrt{5+\sqrt{21}} \quad \sqrt{\sqrt{29}+2} \cdot \sqrt{\sqrt{29}-2} \quad \sqrt{7+\sqrt{24}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{24}}$$

$$\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{19+\sqrt{3}} \quad \left(\sqrt{8-\sqrt{15}} + \sqrt{8+\sqrt{15}}\right)^2 \quad \left(\sqrt{11+\sqrt{21}} - \sqrt{11-\sqrt{21}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{15-\sqrt{56}} + \sqrt{15+\sqrt{56}}\right)^2 \quad \left(\sqrt{\sqrt{89}-\sqrt{8}} - \sqrt{\sqrt{89}+\sqrt{8}}\right)^2$$

30. Végezzük el a következő műveleteket!

$$(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \cdot (2 + 3\sqrt{6}) \quad (2\sqrt{2} - 1) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \quad (\sqrt{10} + 3) \cdot (\sqrt{10} - 3)$$

$$(\sqrt{13} + 1) \cdot (\sqrt{13} - 1) \quad (3\sqrt{2} - 4)^2 \quad (6 + 2\sqrt{3})^2$$

$$(5 - 2\sqrt{5})^2 \quad (\sqrt{7} + 2\sqrt{3})^2$$

31. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} - \sqrt{8} \quad \sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{75} \quad \sqrt{125} - \sqrt{45} - \sqrt{20} \quad \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$$

$$(\sqrt{80} - \sqrt{3} - \sqrt{45}) \cdot (\sqrt{75} + \sqrt{5} - \sqrt{48})$$

32. Gyöktelenítsük a törtek nevezőjét! $\frac{4}{\sqrt{5}}$ $\frac{9}{\sqrt{2}}$ $\frac{12}{\sqrt{3}}$ $\frac{21}{\sqrt{7}}$ $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ $\frac{6}{5\sqrt{3}}$ $\frac{14}{3\sqrt{7}}$ $\frac{13}{3\sqrt{10}}$

33. Gyöktelenítsük a törtek nevezőjét! $\frac{8}{2+\sqrt{5}}$ $\frac{12}{\sqrt{3}-1}$ $\frac{15}{2-\sqrt{7}}$ $\frac{10}{1+\sqrt{6}}$

34. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - \frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \frac{4\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}} - \frac{2-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

35. Vigyük be a gyökjel alá a gyökjel előtt álló számot!

$$3 \cdot \sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$5 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$0,1 \cdot \sqrt{10}$$

$$y^2 \cdot \sqrt{y}$$

$$b \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

36. Melyik szám nagyobb a kettő közül? a) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ $2\sqrt{6}$ b) $3\sqrt{3}$ $\frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}$

37. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \cdot (20 - 2\sqrt{84})}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$$

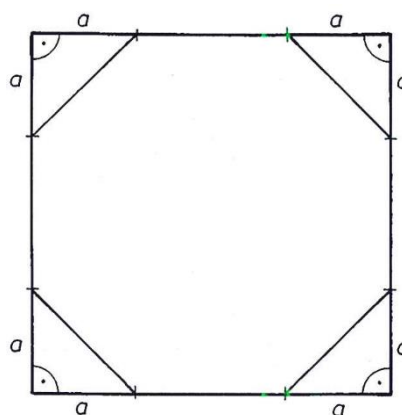
$$\left(\frac{6}{\sqrt{5}+2} + \frac{2}{\sqrt{20}-4} \right) \cdot (10 + 7\sqrt{5})$$

A Pitagorasz tétel alkalmazása

38. Egy háromszög oldalai 13 cm, 20 cm és 21 cm hosszúak. Számítsuk ki a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magasságát!

39. Egy paralelogramma szomszédos oldalai 10 cm és 6 cm hosszúak. A rövidebb átló hossza 7 cm. Számítsuk ki a paralelogramma másik átlóját!

40. Egy 20 cm oldalú négyzet alakú lemezből vágjuk ki a maximális területű szabályos nyolcszöget az ábrán látható módon. Számítsuk ki a nyolcszög oldalát!



41. Számítsuk ki a 12 cm oldalú szabályos háromszögbe írható négy egybevágó kör sugarát!

42. Számítsuk ki a kocka testátlójának hosszát, ha a kocka éle 15 cm!

43. Egy háromszög két oldalának hossza 25 cm és 30 cm, a harmadik oldalhoz tartozó magassága 24 cm. Számítsuk ki a harmadik oldal hosszát!

44. Mekkora a négyzet oldala, ha az átlója 2 cm-rel hosszabb az oldalánál?

45. Egy 34 sugarú körbe írt téglalap oldalainak aránya 8:15. Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát!

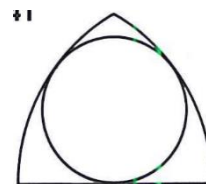
46. Egy egyenlő szárú trapézba egy 3 cm sugarú érintőkört lehet írni. Mekkora a trapéz oldalai, ha a hosszabbik alapja 10 cm?

47. Lássuk be, hogy a derékszögű trapézban az átlók négyzeteinek különbsége megegyezik az alapok négyzeteinek különbségével!

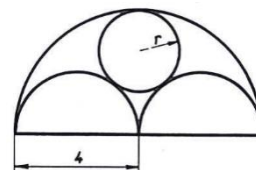
48. Egy kör átmérőjének egyik végpontja a vele párhuzamos húr végpontjaitól 18, illetve 84 cm távolságra van. Mekkora a kör sugara?

49. Két kör sugara 1, illetve 3 cm. A középpontjaikat összekötő szakasz 8 cm. Milyen hosszúak a közös külső érintők és a közös belső érintők?

50. Az ábra szerinti gótikus ablak felső része két körívből áll, ezeknek a sugara megegyezik az ablak 60 cm szélességével. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a két körívet és a vízszintes keresztfát érinti?



51. Számítsuk ki az ábrán látható legkisebb kör sugarát!



Vegyes feladatok

52. Hozzuk egyszerűbb alakra: a) $\sqrt{2g}\sqrt{18g}$ b) $\sqrt{a^3}\sqrt{ab^2}$ c) $4\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}$ d) $(\sqrt{12}-3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$
e) $(\sqrt{6}+5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8})\cdot 2\sqrt{6}$ f) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{18}-\sqrt{3})$ g) $(7\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}-1)$

53. Állapítsuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát:

a) $\sqrt{x-1}$ b) $\sqrt{2x+1}$ c) $\sqrt{5x-2}$ d) $\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}$ e) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ f) $\sqrt{(x-7)^2}$

54. Hozzuk egyszerűbb alakra:

a) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$ b) $\left(m+\sqrt{\frac{n}{m}}\right)\left(m-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)$ c) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})(\sqrt{20}+3\sqrt{2})$

d) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$ e) $(5\sqrt{7}-7\sqrt{5})^2$ f) $(a\sqrt{ab})^3$

55. Gyöktelenítsük a törtek nevezőjét:

a) $\frac{12}{5\sqrt{3}}$ b) $5\cdot\frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{15}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{19}-4}$ e) $\frac{30}{\sqrt{5}-1}$ f) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ g) $\frac{42\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+6}$ h) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$

56. Ábrázoljuk a következő függvényeket: a) $y=3\sqrt{x-4}$ b) $y=\sqrt{x+8}$ c) $y=-\sqrt{x}+3$ d) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x-4}+6$

57. Bizonyítsuk be, hogy a) $\frac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}=\sqrt{50}-\sqrt{12}$ b) $\sqrt{\frac{989}{4}-21\sqrt{5}}=7\sqrt{5}-\frac{3}{2}$

58. Hozzuk egyszerűbb alakra következő kifejezéseket:

a) $(\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}})^2$ b) $(\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{7}}-\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{7}})^2$

59. Bizonyítsd be, hogy

a) $5\sqrt{3}-3\sqrt{5}=\sqrt{30\cdot(4-\sqrt{15})}$ b) (nehéz) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, ha $a\geq 0, b>0, a^2\geq b$

60. Mely a számokra igaz, hogy a) $\sqrt{a^2-6a+9}=a-3$ b) $\sqrt{a^2-6a+9}=3-a$

61. Itt van egy bizonyítás arra, hogy bármely két szám egyenlő, ami nyilván nem igaz. Hol a hiba a következő, deltoid alakú gondolatmenetben?

$$\begin{aligned}
0 &= 0 \\
a^2 &= a^2 \\
a^2 + b^2 &= a^2 + b^2 \\
a^2 + b^2 - 2ab &= a^2 + b^2 - 2ab \\
a^2 - 2ab + b^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= (b-a)^2 \\
\sqrt{(a-b)^2} &= \sqrt{(b-a)^2} \\
a-b &= b-a \\
2a-b &= b \\
2a &= 2b \\
a &= b
\end{aligned}$$

62. Milyen számokat írhatnánk az x helyére, hogy a kifejezés értelmezhető legyen?

$$\sqrt{400-x} \quad \sqrt{16x} \quad \sqrt{10-x} \quad \sqrt{-2x} \quad \sqrt{x-6} - \sqrt{6-x}$$

63. Mikor egyenlő két nemnegatív szám összegének a négyzetgyöke a két számösszegének a négyzetgyökével?

64. Melyik az a legnagyobb a pozitív egész, nem négyzetszám, amelyre $\sqrt{a}$ úgy írható $b\sqrt{c}$ alakba, hogy b kétjegyű, c pedig pozitív egyjegyű egész és nincs lehetőség újabb egész számot kivinni a gyökjel elé?

65. Végezzük el a műveleteket: $\frac{9}{\sqrt{54}-6} + \frac{2}{\sqrt{24}+4}$ $\frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{3}}$

66. Mivel kell bővíteni a következő törtet, ha a nevezőt gyökteleníteni akarjuk?

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}} \quad \frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \quad \frac{3}{\sqrt{a+b}} \quad \frac{4}{x\sqrt{a}} \quad \frac{6}{b-\sqrt{a}}$$

67. Legyen x egy pozitív valós szám. Írjuk fel x segítségével, hogy mennyi

a) x 63 százaléka a négyzetgyöke

b) annak a számnak a négyzetgyöke, amelynek x a 64%-a

c) $64x$ százaléka a négyzetgyöke.

68. Egy egység oldalú, papírból kivágott négyzetet félbehajtottuk az átlója mentén, majd az így keletkezett háromszöget a szimmetriatengelye mentén, ezt a háromszöget szintén, és végül az újabb háromszöget is. Mekkora az így létrehozott háromszög oldalai?

69. Egy egy kilométer és nyolc milliméter hosszú kötelet két, egymástól egy kilométer távolságban levő pontban rögzítünk. Ezután a közepét felemeljük. Mennyire tudjuk felemelni?

70. Kamilla kíváncsi rá, hogy milyen hosszú lehet a toronyóra ingája. Csak azt tudta lemérni, hogy a középső helyzetből a szélső helyzetbe az inga függőlegesen egy métert, vízszintesen nyolc métert tér ki. Hogyan számolta ki Kamilla az inga hosszát és mennyi az?

71. Derékszögűek-e a következő pontokkal megadott háromszögek? $A(-3,3), B(1;6,7), C(1,3)$
 $A(-2,7), B(3,2), C(-3,-4)$ $A(-7,-1), B(10,-8), C(27,9)$

72. Egy trapéz két alapja 15 cm és 9 cm, a szárai 11 cm és 13 cm hosszúak. Mekkora a magassága és a területe?

73. Rajzoljunk rombuszt négyzetrácsos papírra úgy, hogy két oldala vonalra, csúcsai pedig mind rácspontokra illeszkedjen. Milyen oldalhosszúságú rombuszok rajzolhatók meg ennek megfelelően?

74. Számológép nélkül döntsük el, melyik kifejezés értéke nagyobb.

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{3} \text{ vagy } \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2} + \sqrt{16} \text{ vagy } \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2^4}} \text{ vagy } \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{81}} \quad \sqrt{5}^3 \text{ vagy } \sqrt{6} \cdot 20$$

75. Végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} &(\sqrt{3} - 1)(1 + \sqrt{3}) & (3\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 1) & (\sqrt{18} + 3\sqrt{2})^2 \\ &(4\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} - 4\sqrt{2}) & (2\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^2 & \sqrt{7 - \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{24}} \end{aligned}$$

76. Vigyük ki a négyzetgyöke elé, amit lehet. $\sqrt{72}, \sqrt{300}, \sqrt{50}, \sqrt{98}$ $\sqrt{\frac{36}{5}}, \sqrt{\frac{7}{81}}$

77. Vigyük be a négyzetgyöke alá az előtte álló számot. $5\sqrt{3}, 2\sqrt{7}, 10\sqrt{2}, 4\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{40}, \frac{1}{3}\sqrt{45}$

78. Végezzük el a kijelölt műveleteket.

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{32} & 2\sqrt{12} - 2\sqrt{3} - \sqrt{75} & \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{8} \\ &(\sqrt{80} + \sqrt{45} - \sqrt{20}) \cdot \sqrt{5} & (\sqrt{18} + 2\sqrt{7}) \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{28}) & (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot (2\sqrt{6} + \sqrt{24} - \sqrt{27}) \end{aligned}$$

79. Gyöktelenítsük a nevezőt: $\frac{4}{\sqrt{2}} \quad \frac{6}{\sqrt{3}} \quad \frac{20}{3\sqrt{5}} \quad \frac{18}{5\sqrt{6}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad \frac{10}{\sqrt{6}+1} \quad \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$

80. Hozzuk a legegyszerűbb alakra: $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \quad \frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}$

Nehezebb feladatok

81. Lehet-e két irracionális szám összege és szorzata is racionális?

82. Lehet-e két irracionális szám összege és különbsége is racionális?

83. Számológép nélkül számítsuk ki $a^2 - 4\sqrt{7} \cdot a$ értékét, ha $a = \frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$.

84. Hozzuk egyszerűbb alakra: $\left(\frac{a \cdot \sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} - \frac{x \cdot \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) : \sqrt[4]{(a-x) \cdot (a^2-x^2)}$

85. Átalakításokkal mutassuk meg, hogy $\sqrt{35 + 2 \cdot \sqrt{34}} - \sqrt{35 - 2 \cdot \sqrt{34}} = 2$

86. Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét:

a) $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$, ha $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ és $b = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ b) $\frac{1+a}{1+\sqrt{1+a}} + \frac{1-a}{1-\sqrt{1-a}}$, ha $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

87. Mely pozitív egész n-re teljesül? $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = 9$

88. Hozzuk egyszerűbb alakra: $\frac{\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}}{a-b} + \frac{2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

89. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{125+51\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{5-2\sqrt{6}}\right)^2$

90. Számológép nélkül számítsuk ki: $\sqrt{1 + 2022 \cdot \sqrt{1 + 2023 \cdot \sqrt{1 + 2024 \cdot \sqrt{1 + 2025 \cdot 2027}}}}$

91. Egy egyenlő szárú trapézba egy 3 cm sugarú érintőkört lehet írni. Mekkora a trapéz oldalai, ha a hosszabbik alapja 10 cm?

92. Egy háromszög oldalai 25 cm, 52 cm és 63 cm. Határozzuk meg a leghosszabb oldalhoz tartozó magasságot.

93. Egy r sugarú körbe kereszt alakban öt egybevágó négyzetet írunk. Mekkora a négyzetek oldalai?

94. Egy r sugarú körbe három egybevágó, egymást és az eredetit is érintő kört írunk. Mekkora a kis körök sugarai?

95. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegeivel.

II. GEOMETRIA (első rész)

1. Szerkesszük meg a 4 cm sugarú kör kicsinyített képét, ha a hasonlóság középpontja a körvonal egyik pontja, a hasonlóság aránya pedig 0,75.

2. Egy ABCD négyzet oldalfelező pontjait összekötve egy újabb négyzetet kapunk, legyen ez EFGH négyzet. a) Határozzuk meg a két négyzet hasonlósági arányát, ha $AB = 5$ cm.
b) Adjuk meg, milyen transzformációk egymás utáni alkalmazásával kaphatjuk meg az ABCD négyzetből az EFGH négyzetet.

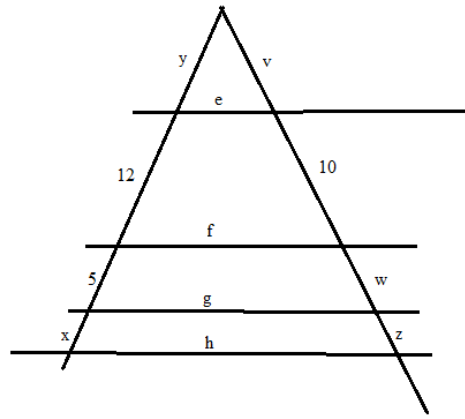
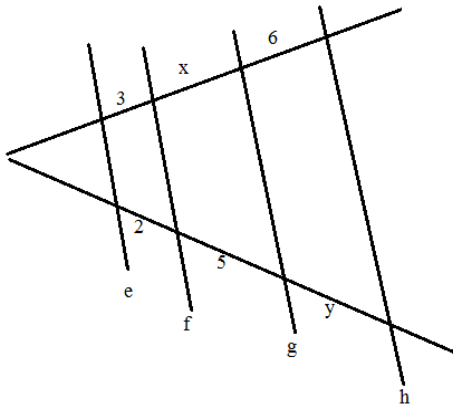
3. Szerkesszük meg azt a háromszöget, amelynek oldalai kétszerese annak a háromszögnek, melynek egyik oldala 2,8 cm, ehhez az oldalhoz tartozó magassága 3 cm, míg a rajta fekvő egyik szöge 60° .

4. Egy háromszög oldalainak arány 2:4:5. Határozzuk meg annak a háromszögnek az oldalhosszait, melynek legrövidebb oldala 3 cm és hasonló az eredeti háromszöghöz.

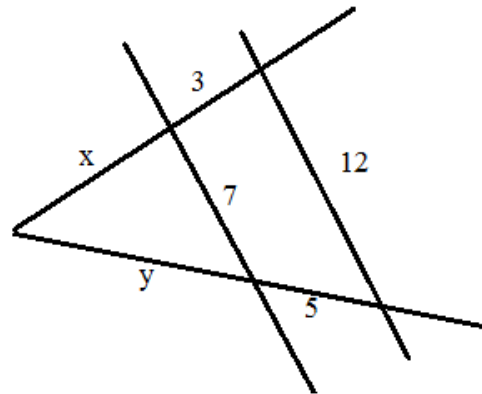
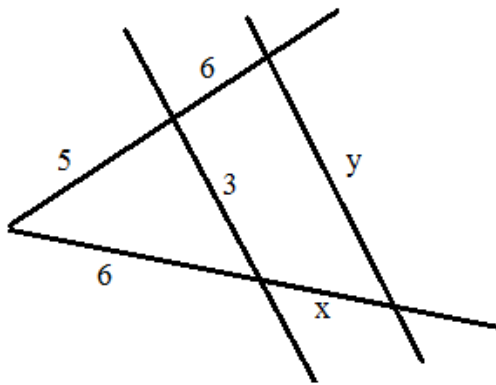
5. Egy toronyház magasságára kíváncsi Eszter és Hannus. Napsütésben 80 cm-es és egy 150 cm-es botot, és úgy szúrták le az épület aljától a hosszabbat 866 cm-re, a kisebbet 907 cm-re, hogy az épület alja, a két bot alja egy egyenes legyenek, továbbá az épület tetejének, és a két bot tetejének árnyékai végpontja közös legyen. Hogyan tudja Eszter és Hannus meghatározni a toronyház magasságát?

6. Napsütéses időben, amikor a fák és a botok árnyékot vetnek, hogyan tudjuk meghatározni egy fa magasságát két különböző hosszúságú bot segítségével anélkül, hogy felemelkednénk a földről?

7. Határozzuk meg a bal oldali ábrán x és y értékét tudván, hogy e , f , g , h egyenesek párhuzamosak.



8. Határozzuk meg a jobb oldali ábrán x , y , z , v , w értékét tudván, hogy e , f , g , h egyenesek párhuzamosak.
9. Számítsuk ki x és y értékét a bal oldali ábrán, ha a szögszárakat metsző egyenesek párhuzamosak.



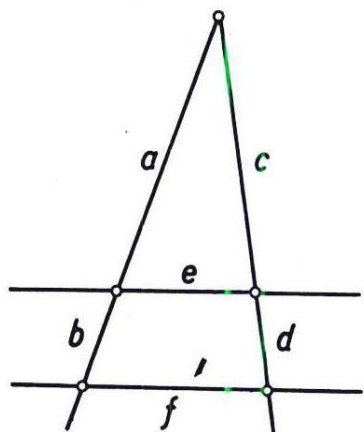
10. Számítsuk ki x és y értékét a jobb oldali ábrán, ha a szögszárakat metsző egyenesek párhuzamosak.
11. Egy trapéz szárainak a hosszabbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait összekötő szakaszt az egyik átló 9 és 1,5 egység hosszú szakaszokra bontja. Mekkora a trapéz alapjai?
12. Egy kertben álló villanyoszlop magasságát szeretnénk meghatározni. A villanyoszlop 6 méterre van a 2 méter magas kerítéstől. A kerítés másik oldalán, tőle 2 méterre leszúrunk egy 1,5 méter magas botot, így a bot vége, a kerítés teteje és a villanyoszlop csúcsa pontosan egy egyenesbe esik. Milyen magas a villanyoszlop?
13. A Börzsöny 1:40 000 arányú turisztaképén Nagyborzsöny és Kisirtáspusztá távolsága vonalzóval mérve 91 mm. Hány km-re van légvonalban a két helység egymástól?
14. Egy trapéz alapjai 36 és 54 mm hosszúak. Milyen arányban osztják egymást az átlók?
15. Egy trapéz alapjai 12 cm és 16 cm. Mekkora az átlók metszéspontjain átmenő, az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapézba eső szakasza?
16. Egy trapéz alapjai a és c . Húzzunk az alapokkal párhuzamos egyenest az átlók metszéspontjain keresztül. Mutassuk meg, hogy ezen egyenesnek a trapézba eső szakaszát az átlók metszéspontja felezi.
17. Egy háromszög oldalai 20, 30, 40 cm. Határozzuk meg annak a hozzá hasonló háromszögnek az oldalait, amelynek a) a legnagyobb oldala 25 cm, b) a területe 135 cm, c) a legnagyobb és legkisebb oldalának különbsége 5 cm.

- 18.** Egy rombusz átlói 14 és 48 cm. Egy hozzá hasonló rombusz kerülete 250 cm. Mekkora ennek a rombusznak az átlói?
- 19.*** Egy egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága 8 cm, a szárhoz tartozó magassága 4 cm. Számítsuk ki a háromszög területét.
- 20.** Két kör kívülről érinti egymást. A kisebbik, 3 cm sugarú kör középpontjától 7 cm-re levő pontból közös külső érintő húzható a körökhöz. a) Mekkora a nagyobbik kör sugara? b) Milyen hosszú a közös érintőszakasz?
- 21.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10, szára 13 egység hosszúságú. Mekkora sugarú kör írható a háromszögbe?
- 22.*** Egy egyenlő szárú háromszögbe negyed akkora sugarú kör írható, mint a háromszög alapja. Számítsuk ki a háromszög alapjának és szárának arányát.
- 23.** Egy körben egy 11 mm-es húr 2:3 arányban oszt egy 10 mm-es húrt. Mekkora részekre osztja a rövidebb húr a hosszabb húrt?
- 24.** Egy kör belsejében levő P ponton át húzzunk két tetszőleges szelőt. Lássuk be, hogy a két szelőn a P-től a körvonalig terjedő szakaszok szorzata ugyanaz.
- 25.** Egy négyzet belsejébe rajzoljunk téglalapot, melynek oldalai párhuzamosak a négyzet oldalaival. Szerkesszünk olyan pontot a négyzet belsejében, amelyből a négyzetet úgy lehet lekicsinyíteni, hogy a kicsinyített négyzet három oldala a téglalap három oldalára essék.
- 26.** Egy háromszög egyik oldala fölé szerkesszünk az eredeti háromszöggel egybevágó háromszöget. Az oldallal szemközti csúcsból kicsinyítsük le a háromszöget oly módon, hogy csúcsai a háromszög oldalaira essenek.
- 27.** Rajzoljunk háromszöget, majd az egyik oldallal párhuzamosan egy szakaszt. Szerkesszük meg a vetítési középpontot úgy, hogy az adott szakasz a vele párhuzamos háromszögoldal nagyított képe legyen, majd hajtsuk végre a nagyítást.
- 28.** Rajzoljunk egy háromszöget, és egy szakasszal jelöljük ki, hogy az egyik oldalt mekkorára akarjuk kicsinyíteni. A kicsinyítés középpontját előre vegyük fel, és hajtsuk végre a szerkesztést.
- 29.** Az O középpontú kört nagyítsuk (ill. kicsinyítsük) egy előre kitűzött A pontból úgy, hogy a kör középpontja az OA egyenes adott O' pontjába essék.
- 30** Rajzoljunk egy háromszöget és egy téglalapot. Szerkesszünk a háromszög oldalai fölé a megadotthoz hasonló téglalapokat, amelyeknek hosszabbik oldala egy-egy háromszögoldal.
- 31.** Adott egy téglalap. Egy egyenessel vágjunk le belőle olyan téglalapot, amely az eredetihez hasonló.
- 32.** Adott hegyesszögű háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk egyenest úgy, hogy az eredetihez hasonló háromszöget messen le a háromszögből.
- 33.** Egy háromszög egyik oldalához illesszünk egy olyan háromszöget, mely az elsővel együtt az eredetihez hasonló háromszöget ad.
- 34.** Szerkesszünk adott háromszögbe téglalapot, melynek oldalainak aránya 2:3.

35. Adott egy szög és szárai között egy P pont. Szerkesszünk kört, amely a szögszáraikat érinti, és átmegy az adott P ponton.

36. Mutassuk meg, hogy a háromszög egyik oldalával a háromszög belsejében párhuzamosan húzott szakaszokat az oldalhoz tartozó súlyvonal felezi.

37. Egy szög szárait párhuzamosokkal metszettük el. Jelöljük a keletkezett szakaszokat rendre a, b, c, d, e, f-fel. Töltsük ki a mellékelt táblázat üresen hagyott helyeit.



a	7	10	10
b	4		
c	9	11	11
d		6	3
e	6	8	
f			9

38. Adott az ABC háromszögben az AC-vel párhuzamos DE távolság (D az AB-n, E a CB-n helyezkedik el). Meghatározandó AD, ha $AB = 16$ cm, $AC = 2$ dm, $DE = 15$ cm.

39. Szerkesztéssel egy adott szakaszt osszunk fel 2:3 arányú részekre.

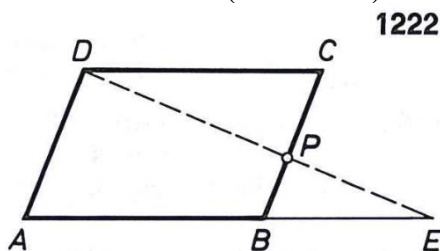
40. Rajzoljunk négyzetet és egy téglalapot. A téglalapot nagyítsuk akkorára, hogy kerülete egyezzen a négyzet kerületével.

41. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két szöge és a velük szemközi oldalak összege.

42. Szerkesszünk négyzetet, ha adott a) az átló és oldal összege, b) az átló és oldal különbsége.

43. Az ABC háromszög AC oldalával húzott párhuzamos az AB oldalt D, a BC-t E pontban metszi. Határozzuk meg DE hosszát, ha adott a háromszög oldalainak hossza, továbbá az $AD + CE$ összeg. A háromszög oldalai: $AB = 24$ cm, $BC = 32$ cm, $AC = 28$ cm és $AD + CE = 16$ cm.

44. Egy ABCD paralelogramma AB oldala 4,2 cm. A BC oldalon levő P pont 5:7 arányú részekre osztja a BC oldalt. Az AB oldalt mennyivel kell meghosszabbítani, hogy az E végpontjából húzott PE szelő átmenjen a paralelogramma felső D csúcsán? (1222. ábra)



45. Egy O csúcspontú szög szárait két párhuzamos egyenessel elmetstettük úgy, hogy a csúcstól számítva az egyik száron a metszéspontok rendre A, B, a másik száron pedig C, D. Töltsük ki az alábbi táblázat hiányzó rovatait, ha $OA=a$, $AB=b$, $OC=c$, $CD=d$, illetve $AC=x$ és $BD=y$.

a	b	c	d	x	y
5 cm	4 cm	3 cm		7 cm	
2 cm		3 cm		4 cm	9 cm
3 cm	6 cm		4 cm		8 cm

46. Adjunk szerkesztési eljárást a háromszög szerkesztésére, ha oldalainak aránya 2:3:4, továbbá kerülete egy adott szakasz hosszával egyenlő.

47. Egy szimmetrikus trapéz alapjainak hossza 6 cm és 15 cm, szárai 7 cm hosszúak. Számítsuk ki a trapéz kiegészítő háromszögének oldalait.

48. Egy trapéz rövidebb alapjának hossza 7 cm, kiegészítő háromszögének két másik oldala 2 cm és 6 cm hosszú. Számítsuk ki a trapéz szárainak hosszát, ha a másik alapjának hossza 15 cm.

49. Az ABCD trapéz AD szálának hossza 5 cm. A trapéz DCE kiegészítő háromszögének DE oldala 17,5 cm hosszú. Számítsuk ki a trapéz alapjainak hosszát, ha tudjuk, hogy az AB alap 4 cm-rel hosszabb a CD alpnál.

50. Az ABCD paralelogramma AB oldalának hossza 12 cm. Az AB oldal B ponton túli meghosszabbítására illeszkedő E pontra teljesül, hogy $BE=4$ cm. Számítsuk ki, hogy milyen arányban osztja az ED egyenes a paralelogramma BC oldalát.

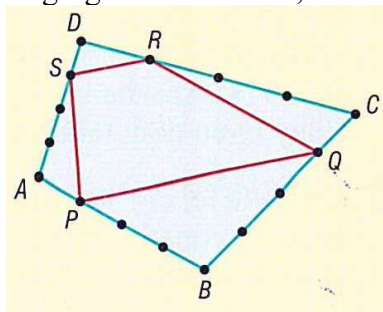
51. Aladár egy vízszintes terepen álló, ipari létesítmény magasságát szeretné megmérni. Megfigyelte, hogy ha az építménytől egyenes vonalban távolodik, akkor 120 métert megtéve egy 7 méter magas fához ér, míg ha még 30 métert továbbmegy, akkor olyan pontba érkezik, ahonnan a fa, valamint a létesítmény tetejét egy vonalban látja. Milyen magas az ipari létesítmény, ha Aladár szemmagassága pontosan 2 méter?

52. Az ABCD konvex négyszög oldalainak negyedelő pontjai közül néhányat az ábra szerint összeköttöttünk, így a PQRS négyszöget kaptuk.

a) Bizonyítsuk be, hogy a PQRS négyszög trapéz.

b) Számítsuk ki a PQRS trapéz alapjainak hosszát, ha az ABCD négyszög AC átlója 20 cm hosszúságú.

c) Igaz marad-e az a) részfeladatban megfogalmazott állítás, ha az ABCD négyszög konkáv?



53. Egy trapéz alapjainak hossza 6 cm, illetve 12 cm.

a) Bizonyítsuk be, hogy a trapéz átlói 1:2 arányban osztják egymást.

b) Számítsuk ki az átlók metszéspontján átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenes trapézba eső szakaszának hosszát.

54. Vegyünk fel egy háromszöget, majd szerkesszük meg a középvonalait. Szerkesszünk olyan pontot, amelyre vonatkozó középpontos hasonlóság a háromszöget a középvonalak alkotta háromszögbe viszi át. Mekkora a középpontos hasonlóság aránya?

55. Vegyünk fel egy pontot, egy szakaszt, valamint egy vele nem párhuzamos egyenest. Szerkesszük meg a szakasz adott pontra vonatkozó, középpontosan hasonló képét úgy, hogy egyik végpontja az egyenesre illeszkedjen. Hány megoldása van a feladatnak?

56. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

- a) Bármely két szabályos háromszög hasonló.
- b) Bármely két kör hasonló.
- c) Ha két egyenlő szárú háromszögben egy-egy szög megegyezik, akkor a két háromszög hasonló.
- d) Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha száraik által bezárt szögük egyenlő.
- e) Ha két téglalapban az átlók ugyanakkora szöget zárnak be, akkor a téglalapok hasonlóak.
- f) Két rombusz hasonló, ha átlóik aránya megegyezik.
- g) Két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik megegyeznek.
- h) Ha két szabályos sokszögnek ugyanannyi oldala van, akkor a két sokszög hasonló egymáshoz.

57. Hasonlók-e egymáshoz az ABC és A'B'C' háromszögek, ha az

- a) $AB=2$ cm, $BC=6$ cm, $AC=6$ cm, valamint $A'B'=5$ cm, $B'C'=15$ cm, $A'C'=15$ cm;
- b) $AB=1,5$ dm, $BC=20$ cm, $AC=3$ dm, valamint $A'B'=75$ cm, $B'C'=10$ dm, $A'C'=150$ cm;
- c) $AB=10$ cm, $BC=20$ cm, $AC=15$ cm, valamint $AB'=6$ cm, $B'C'=12$ cm, $A'C'=8$ cm.

58. Egy háromszög oldalai 3 cm, 4 cm, illetve 6 cm. Mekkora a hozzá hasonló háromszög oldalai, ha

- a) a kerülete 19,5 cm; b) a legrövidebb oldala 10,5 cm; c) a leghosszabb és legrövidebb oldalának különbsége 6 cm; d) a leghosszabb és legrövidebb oldalának összege 45 cm?

59. Egy négyszög adott sorrendben vett oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 4:3:5:6-hoz. Határozzuk meg a hozzá hasonló négyszög oldalait, ha a) a kerülete 72 cm; b) a leghosszabb oldala 36 cm; c) a leghosszabb és legrövidebb oldalának összege 20 cm.

60. Az ABC hegyesszögű háromszögben az $AB=15$ cm. A háromszög CA és CB oldalait három egyenlő részre osztjuk. A CA oldal C-hez közelebbi, valamint a CB oldal B-hez közelebbi osztópontján át egyenest fektetünk; az egyenes a háromszög AB oldalegyenesét a D-pontban metszi. Számítsuk ki a BD szakasz hosszát.

61. Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói, ha alapjainak hossza 5 cm és 35 cm?

62. Egy trapéz átlói 1:5 arányban osztják egymást. Mekkora a trapéz hosszabb alapja, ha a rövidebb 12 cm hosszúságú? Oldjuk meg a feladatot, ha az átlók p:q arányban osztják egymást ($p < q$).

63. Egy trapéz alapjainak hossza a és c. A trapézt a szárakat összekötő, középvonalával párhuzamos egyenessel két hasonló négyszögre bontjuk. Fejezzük ki az egyenes trapézba eső szakaszának hosszát a-val, illetve c-vel.

64. Egy trapéz két alapjának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3:7-hez, valamint egyik szára 20 cm. Milyen távolságra van a trapéz kiegészítő háromszögének trapézon kívüli csúcsa az ismert szár rövidebb alapra illeszkedő végpontjától?

65. Az ABCD paralelogramma alakú parkon át két út húzódik; az egyik az AC átló mentén halad, a másik az AD oldalt 2:3 arányban osztó pontot köti össze a park B csúcsával. Milyen arányban metszi egymást a két út?

66. Az ABC hegyesszögű háromszögben meghúzzuk az AB, valamint a BC oldalakhoz tartozó magasságokat, amelyeknek talppontjai rendre D, illetve E.

a) Bizonyítsuk be, hogy a BCD háromszög hasonló a BAE háromszöghöz.

b) Mekkora részekre osztja az E pont a háromszög BC oldalát, ha az ABC háromszög egyenlő szárú, AB alapjának hossza 12 cm, CD magasságának hossza pedig 8 cm?

67. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB=12$ cm, $BC=18$ cm, $AC=20$ cm. A háromszögbe rombuszt írunk úgy, hogy egyik csúcsa egybeesik a háromszög egyik csúcsával, a közös csúcsnál lévő oldalai a háromszög egy-egy oldalára, a szemközti csúcsa pedig a háromszög szemközti oldalára illeszkedik.

a) Hányféleképpen írhatunk így rombuszt a háromszögbe?

b) Számítsuk ki az egyes esetekben a rombusz oldalának hosszát.

68. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 24 cm, a hozzá tartozó magasság hossza 15 cm. A háromszögbe téglalapot írunk, amelynek egyik 8 cm hosszú oldala illeszkedik a háromszög alapjára, a másik két csúcsa pedig a háromszög egy-egy szárán található. Számítsuk ki a téglalap másik oldalának hosszát.

69. Vegyünk fel egy c szakaszt, és ezen szemeljünk ki egy pontot, legyen ez E. Vegyünk fel továbbá egy r távolságot. Szerkesszünk háromszöget, amelynek egyik oldala c , az r sugarú beírt köre E-ben érinti a c oldalt.

70. Szerkesszünk egy adott körhöz egy adott külső pontból érintőt.

71. Adjunk meg egy e egyenest és vegyünk fel egy k kört. Szerkesszünk a k körhöz az e egyenessel párhuzamos érintőt.

72. Vegyünk fel egy szöget és egy r szakaszt. Szerkesszünk r sugarú kört, amely érinti a szög két szárát.

73. Mekkora szögben látszik a háromszög köré írt kör középpontjából a háromszög α szögével szemközti oldala?

74. Egy háromszög két oldala a köré írt kör középpontjából 126° -os, illetve 68° -os szögben látszik. Mekkora a háromszög szögei?

75. A kört egy húrja két ívre vágja. Az egyik ív pontjaiból a húr 128° -os szögben látszik. Mekkora a másik ív pontjaiból a húr látószöge?

76. Egy pontból egy körhöz húzott két érintő 67° -os szöget zár be. Mekkora szögben látszik az érintési pontokat összekötő húr a kör pontjaiból?

77. Helyezzünk egy körben egy sugár hosszúságú húrt. Mekkora szögben látszik ez a kör pontjaiból?

78. Mekkora az a kerületi szög, amelynek száraiból a kör egy-egy sugár hosszúságú szakaszt vág le?

79. Mekkora az a kerületi szög, amelynek egyik szára a kör sugara, másik a kör átmérője?

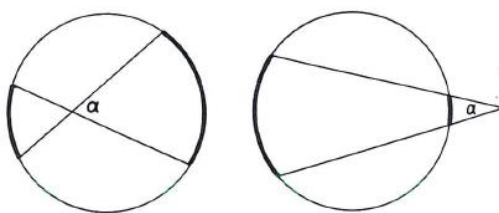
80. Rajzoljuk meg egy ABC háromszög A csúcsához tartozó szögfelezőt és hosszabbítsuk azt meg a köré írt körig. Így a P ponthoz jutunk. Bizonyítsuk be, hogy $PB = PC$.

- 81.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármely csúcsából kiindul szögfelező és ezen csúccsal szemközi oldal felezőmerőleges a köré írt körön metszik egymást.
- 82.** Húzzuk be egy háromszög A és B csúsaiból induló magasságvonalakát és hosszabbítsuk meg ezeket a köré írt körig. Legyen az így kapott két pont R és S. Lássuk be, hogy $RC = SC$.
- 83.** Hosszabbítsuk meg a háromszög magasságvonalaival a köré írt körig. Lássuk be, hogy ezen három pont által alkotott háromszög szögfelezői egybeesnek az eredeti háromszög magasságvonalaival.
- 84.** Egy háromszög három szöge 50° , 60° , 70° . Rajzoljuk meg a háromszög csúcsaiban a köré írt kör érintőit. Számítsuk ki ezen érintők által meghatározott háromszög szögeit.
- 85.** Legyenek α , β , γ egy hegyesszögű háromszög szögei. Rajzoljuk meg a háromszög csúcsaiban a köré írt kör érintőit. Fejezzük ki az érintők által meghatározott háromszög szögei α -val, β -val, γ -val.
- 86.** Egy háromszög szögei α , β , γ . Mekkora annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt kör érintési pontjai határoznak meg?
- 87.** Írjunk kört egy egyenlő oldalú háromszög köré, és tűzzünk ki a kör kerületén egy pontot. Mekkora szögben látszanak ebből a pontból a háromszög oldalai?
- 88.** Tűzzünk ki két jó kedvű pontot, A-t és B-t és adjunk meg egy α szöget és egy e egyenest. Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből az AB szakasz α szögben látszik.
- 89.** Tűzzünk ki két biztos pontot (A, B) és vegyünk fel egy kört. Szerkesszük e körön olyan pontot, amelyből az AB szakasz 30° szögben látszik.
- 90.** Egy szög egyik szárán tűzzünk ki egy c szakaszt, a másikon egy b szakaszt, továbbá vegyünk fel egy γ és egy β szöget. Szerkesszünk olyan pontot, amelyből a c szakasz γ , a b szakasz β szögben látszik.
- 91.** Egy négyzet belsejében hogyan lehet egy olyan pontot szerkeszteni, amelyből két szomszédos oldal egyike 90° -os, másika 120° -os szögben látszik?
- 92.** Tűzzünk ki egy szakaszt és vegyünk fel egy a szakaszra merőleges és a szakaszt nem metsző egyenest. Szerkesszük meg az egyenesen azt a pontot, amelyből a szakasz a legnagyobb szögben látszik.
- 93.** Egy színház felülnézete látható az ábrán. Tegyük fel, hogy a téglalap két hosszabb oldala mentén végig oldalpáholyok vannak. Hogyan tudnánk megszerkeszteni az az oldalpáholyt, azaz a téglalap hosszabb oldalának azt a pontját, amelyből a legnagyobb szög alatt látszik a színpad.
(Segítség: rajzoljuk be a színpad különböző szögű látóköríveit.)



- 94.** Hogyan lehet azt a háromszöget megszerkeszteni, amelynek az a oldala 7 cm , az ezzel szemközi szöge 45° , és az a oldalhoz tartozó magassága 4 cm ?
- 95.** Hogyan lehet azt a háromszöget megszerkeszteni, amelynek az a oldala 7 cm , az ezzel szemközi szöge 45° , és az a oldalhoz tartozó súlyvonala 5 cm ?

- 96.** Hogyan lehet megszerkeszteni azt a paralelogrammát, amelynek a két átlója 6 cm és 8 cm, továbbá az egyik szöge 60° ?
- 97.** Hogyan lehet azt a háromszöget megszerkeszteni, amelynek az a oldala 8 cm, a b oldalhoz tartozó súlyvonala 5 cm, és tudjuk, hogy ez a súlyvonal a b oldallal 45° -os szöget zár be?
- 98.** Szerkesszünk négyszöget a következő öt adatból: két átlója, két szomszédos oldala és a másik két oldal által bezárt szög. Csak a szerkesztés menetét kell leírni vázlatrajz kíséretében.
- 99.** Vegyünk fel két szöget (α , β) és egy kört. Szerkesszünk a körbe egy háromszöget, amelynek két szöge α és β .
(Segítség: rajzolj ábrát. Az α és a β kerületi szögek, ahogy ez a megrajzolt ábrán látható. Keressük meg az ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szögeket.)
- 100.** Keressünk egy előre felvett háromszögben egy olyan pontot, amelyből mindhárom oldal ugyanakkora szögben látszik.
(Segítség: mekkora ez a szög?)
- 101.** Két jelentősen különböző sugarú érintkező kör érintési pontját át húzzunk egy szelőt. Ez mindkét körből kimetsz egy húrt. Bizonyítsuk be, hogy mindkét húrhoz ugyanakkora középponti szög tartozik.
- 102.** Két jelentősen különböző sugarú metsző kör egyik metszéspontján át húzzunk egy tetszőleges egyenest. Mutassuk meg, hogy ennek az egyenesnek a körökön belül fekvő darabja a két kör másik metszéspontjából mindig ugyanakkora szögben látszik, akárhogy is húzzuk meg az egyenest.
- 103.** Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egyenlő szárú háromszöget határoz meg. A háromszög egyik csúcsából húzott szögfelező, a körhöz ugyanabban a csúcsban húzott érintő és a csúccsal szemköztli oldal egyenese.
- 104.** Az ábrán a vastagon kihúzott ívekhez tartozó kerületi szögek nincsenek bejelölve. Legyenek ezek β és γ . Fejezzük ki α -t β -val és γ -val.



- 105.** Legyen α , β , γ egy hegyesszögű háromszög három szöge. Mekkora szöget zár be a háromszög köré írt köréhez az α csúcsában rajzolt érintő a szemköztli oldal egyenesével?
- 106.** Szerkesszünk háromszöget, ha az egyik oldala 5 cm, az ezzel szemköztli szöge 60° és háromszög köré írt kör sugara 4,5 cm.
- 107.** Igazoljuk, hogy minden négyszög szögfelezői húrnégyszöget zárnak közre.
- 108.** Húzzuk meg egy háromszög három magasságvonalát. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, egyik csúcsa és az ebből a csúcsból induló oldalakon levő magasságtalppontok egy körön vannak.

(Segítség: mit volna elég belátni?)

109. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög egy belső pontjából az oldalakra állított merőleges szakaszok a háromszöget három hűrnégyszögre bontják.

110. Egy kör AB átmérőjének B-n túl levő meghosszabbítására C pontjában állítsunk merőlegest. Ezt a merőlegest D pontban és a kört E pontban metszi egy A-ból húzott másik egyenes. Bizonyítsuk be, hogy BCDE négyszög hűrnégyszög.

111. Szerkesszünk hűrnégyszöget, ha három oldala 3 cm, 4 cm, 4,5 cm, és a két kisebb oldal által bezárt szög 45° .

112. Húzzunk két jelentősen különböző sugarú egymást metsző kör metszéspontjain át egy-egy szelőt. Ezek mindkét kört még egy pontban metszik. Kössük össze az ugyanabban a körben levő második metszéspontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert két egyenes párhuzamos.

(Segítség: kössük össze a két kör metszéspontjait egy szakasszal. Mit kaptunk? Arról mit tudunk? Azt hogyan használhatnánk fel?)

113. Rajzoljunk érintőt a háromszög köré írt köréhez az egyik csúcsában és messük el a csúcshoz tartozó két oldalt egy ezzel az érintővel párhuzamos egyenessel. Mutassuk meg, hogy a háromszögből így lemetezett négyszög hűrnégyszög.

114. Hogyan lehet érintőnégyszöget szerkeszteni, ha adott a beírt kör sugara, a két oldala és e két oldal által közbezárt szög?

115. Vegyünk fel három szakaszt (a, b, r) és egy α szöget. Szerkesszük meg azt az érintőnégyszöget, amelynek két szomszédos oldala a és b, az általuk bezárt szög α , és a beírt kör sugara r.

116. Vegyünk fel három szöget (α , β , γ) és egy r szakaszt. Szerkesszük meg azt az érintőnégyszöget, amelynek α , β , γ szögei vannak és a beírt körének sugara r.

117. Számítsuk ki a körcikk területét és a határoló körív hosszát, ha a sugár 8 cm, a középponti szöge pedig 15° , 60° , 115° , 150°

118. Mekkora az 5 cm sugarú körcikk középponti szögének mértéke fokban, illetve radiánban, ha a határoló körív hossza 5 cm, 8 cm, 12 cm, 25 cm?

119. Számítsuk ki a körcikk sugarát és középponti szögének mértékét fokban és radiánban, ha területe 32 cm^2 , határoló körívének hossza 8 cm, 11, 7 cm, 13,85 cm

120. Mekkora kerületi szög tartozik ahhoz a körívhez, amelyhez tartozó középponti szög nagysága 16° , 31° , 70° , 180° , 210° , 350°

121. Mekkora középponti szög tartozik ahhoz a körívhez, amelyhez tartozó kerületi szög nagysága 10° , 35° , 90° , 150° , 160° , 175° ?

122. Mekkora középponti illetve kerületi szög tartozik ahhoz a körívhez, amelynek hossza a kör kerületének $\frac{1}{3}$ -a, $\frac{3}{5}$ -e, $\frac{11}{12}$ -a, 50%-a, 75%-a?

- 123.** Egy kör egy rögzített körívéhez tartozó középponti szög 70° -kal nagyobb, mint a rajta nyugvó kerületi szög. Számítsuk ki a köríven nyugvó középponti és kerületi szög nagyságát.
- 124.** A kör egy rögzített ívéhez tartozó középponti és kerületi szög összege 80° . Számítsuk ki a középponti és kerületi szögeket.
- 125.** A kört egy húrja két körszeletre bontja. A húr a kör középpontjából a) 15° , b) 37° , c) 50° szögben látszik. Mekkora szögben látszik a húr a kisebb körszeletet határoló körív pontjaiból?
- 126.** Egy háromszög köré írható kör sugara 15 cm. A háromszög csúcsai a kört három olyan körívre bontják, amelyek, amelyek hosszának aránya 2:3:7. Számítsuk ki a háromszög szögeit, valamint a keletkező körívek hosszát.
- 127.** Egy körhöz két pontjában érintőket húzunk. Mekkora szöget zárnak be az érintők, ha az érintési pontokat összekötő húr a kör középpontjából a) 20° , b) 60° , c) 130° -os szögben látszik.?
- 128.** A hegyesszögű ABC háromszög köré írt köréhez a háromszög csúcsaiban érintőket húzunk. Az érintőegyeneselek által közrefogott háromszög két szöge 70° és 84° . Számítsuk ki az ABC háromszög szögeinek nagyságát.
- 129.** Vegyünk fel egy szakaszt. Szerkesszük meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekből a szakasz a) 75° -os, b) 135° -os, c) 150° -os szögben látszik.
- 130.** Vegyünk fel egy négyzetet. Hogyan lehet megszerkeszteni azokat a pontokat, amelyekből a négyzet két szemközti oldala 60° -os szögben látszik?
- 131.** Előfordulhat-e, hogy egy húrnégyszögben a szögek úgy aránylanak egymáshoz, mint a) 3:5:4:4, b) 2:5:4:4?
- 132.** Egy húrnégyszögnek egy körüljárási irány szerinti szögeinek aránya
a) 3:2:3:4, b) 3:2:9:10, c) 5:20:31:16. Számítsuk ki a négyszög szögeit.
- 133.** Mekkora annak a húrnégyszögnek a szögei, amelynek két külső szögének nagysága
a) 35° , 120° , b) 70° , 65° , c) 85° , 155° .
- 134.** Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög bármely belső szöge ugyanakkor, mint a szemközti külső szöge.
- 135.** Lássuk be, hogy a húrnégyszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást.
- 136.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két csúcsa, és a belőlük kiinduló magasságvonalak talppontjai húrnégyszöget alkotnak.
- 137.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos sokszög AB oldala a csúcsokból (kivéve A-t és B-t) ugyanakkora szögben látszanak.
- 138.** Egy szabályos sokszög egyik oldala a köré írt kört két ívre bontja. Mekkora szög alatt látszik a kisebb körív pontjaiból a sokszög oldala? Az oldalak száma a) 5, b) 6, c) 12, d) n.

III. MÁSODFOKÚ VILÁG

A teljes négyzetté kiegészítés

1. Alakítsuk át a másodfokú kifejezéseket teljes négyzetté:

$$x^2 - 2x - 3 \quad a^2 + 4a + 6 \quad a^2 + 6a + 1 \quad x^2 - 8x + 20 \quad a^2 - 10a + 2$$

2. Alakítsuk át a másodfokú kifejezéseket teljes négyzetté:

$$x^2 - 6x + 4 \quad x^2 + 12x + 40 \quad x^2 - 10x - 1 \quad 3x^2 - 18x + 12 \quad -x^2 + 8x - 6$$

3. Ábrázoljuk: $y = x^2 - 4x + 4$

$$y = x^2 - 4x + 7$$

4. Jellemezzük a következő függvényt: $y = (x+1)^2 + 2$

5. Oldjuk meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad x^2 - 4x - 12 = 0 \quad x^2 - 4x - 13 = 0$$

6. Mi a függvény értékkészlete? $y = x^2 + 2x + 2$

$$y = -x^2 + 2x - 6$$

7. Oldjuk meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad x^2 + 4x + 12 = 0 \quad x^2 + 8x + 12 = 0 \quad x^2 + 12x + 27 = 0$$

8. Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket:

$$2x^2 + 4x - 6 \quad 3x^2 - 5x - 2 \quad 4x^2 + x - 3 \quad 2x^2 + 3x - 2$$

9. Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket:

$$x^2 + 16x + 4 \quad x^2 - 20x + 7 \\ 2x^2 - 8x + 13 \quad 3x^2 - 12x + 7 \quad -x^2 - 10x + 2$$

10. Alakítsuk át a másodfokú kifejezéseket teljes négyzetté:

$$2x^2 - 16x + 26 \quad -x^2 - 6x + 3 \quad -x^2 + 12x + 1 \quad 3x^2 + 12x + 2 \quad -5x^2 - 20x - 7$$

11. Ábrázoljuk a következő függvényeket: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$f(x) = x^2 + 10x + 24 \quad f(x) = x^2 - 10x + 25 \quad f(x) = 2x^2 + 4x + 3$$

12. Ábrázoljuk a következő függvényeket: $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$ $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

$$f(x) = -x^2 - 10x - 21 \quad f(x) = -3x^2 - 12x - 9$$

13. Oldjuk meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad x^2 + 4x + 12 = 0 \quad x^2 + 8x + 12 = 0 \quad x^2 + 12x + 27 = 0$$

$$x^2 + 12x + 20 = 2x + 11 \quad x^2 + 19x - 1 = 11x + 8 \quad x^2 - 6x + 51 = 10x + 12$$

Másodfokú egyenletek

Oldjuk meg a megoldóképlettel:

$$14. 3x^2 - 5x + 53 = 2x^2 + 9x + 5 \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad x^2 + 4x - 5 = 0 \quad x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \quad 2x^2 - 5x - 2 = 0 \quad 2x^2 - 20x + 50 = 0 \quad 3x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$3x^2 + 11x + 6 = 0 \quad 4x^2 + 15x - 4 = 0 \quad 13x^2 + 11x + 4 = 0$$

$$15x^2 + x - 6 = 0 \quad -x^2 + 14x - 49 = 0 \quad -6x^2 + 5x + 4 = 0 \quad -12x^2 + x + 35 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad 3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad 4x^2 + x - 3 = 0 \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$4x^2 + x - 3 = 0 \quad 3x^2 + 2x - 8 = 0 \quad 4x^2 - 4x - 45 = 0$$

15. Határozzuk meg c értékét úgy, hogy az $y = x^2 - 8x + c$ függvény minimumértéke

a) 5 legyen, b) -10 legyen.

16. Határozzuk meg p és q értékét úgy, hogy az $y = x^2 + px + q$ függvény a) minimumhelye 3, minimumértéke pedig -1 legyen, b) minimumhelye 0, minimumértéke pedig 5 legyen.

17. Oldjuk meg a megoldóképlettel:

$$3s^2 + 4s + 1 = 0 \quad 5x^2 + 11x + 8 = 0 \quad n^2 = 26 - 11n \quad 5x^2 - 11x + 8 = 0$$

18. Hol van szélsőérték helye és mennyi a szélsőérték? $y = -x^2 + 8x$

19. Ábrázoljuk: $y = 3x^2 - 12x + 15$

20. Hol van maximuma és mennyi a maximumértéke?

$$y = -x^2 + 10x \quad y = 2x^2 - 10x - 22 \quad y = -x^2 - 8$$

A diszkrimináns

21. A c paraméter mely értékeire lesz az $5x^2 - 4x + c = 0$ egyenletnek

a) két különböző megoldása, b) egy valós megoldása?

22. Az $ax^2 + 6x - 1 = 0$ egyenletben határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy

a) az egyenlet egyik megoldása $x = -3$ legyen

b) az egyenletnek egyetlen valós megoldása legyen

c) az egyenletnek két különböző valós megoldása legyen

d) az egyenletnek ne legyen valós megoldása!

23. Az $mx^2 - (2m + 2)x + m - 3 = 0$ egyenletben határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy

a) az egyenletnek egyetlen valós megoldása legyen

b) az egyenletnek két különböző valós megoldása legyen

c) az egyenletnek ne legyen valós megoldása!

24. A p valós paraméter mely értékeire lesznek az egyenlet gyökei egyenlők?

$$x^2 - 8px + 2x + 15p^2 - 2p - 7 = 0$$

25. Vizsgáljuk meg, hogy a b paraméter értékétől függően hány megoldása van az egyenletnek!

$$2x^2 + 2bx + b + 4 = 0$$

$$bx^2 - 8x + 10 - b = 0$$

26. A b valós paraméter mely értékei esetén lesz minden valós x -re pozitív a következő kifejezés?

$$x^2 - 2bx + 2b + 15$$

$$bx^2 + bx - 4x + 4 - b$$

27. Határozzuk meg a b paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezés értéke minden valós x helyen negatív legyen!

$$bx^2 + bx + 3x + b + 3$$

$$bx^2 - 12x + 15 - b$$

Gyökök és együtthatók közötti összefüggések

28. Oldjuk meg a megoldóképlettel az egyenleteket!

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$2x^2 - 8x - 42 = 0$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$6x^2 - 23x - 4 = 0$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$6x^2 - 5x - 6 = 0$$

29. Oldjuk meg a megoldóképlettel az egyenleteket!

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$3x^2 + 11x - 4 = 0$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$2x^2 - 8x - 42 = 0$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$5x^2 - 19x - 4 = 0$$

$$x^2 + 12x + 32 = 0$$

$$6x^2 - 5x - 6 = 0$$

30. A $2x^2 + 5x - 1 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzuk meg a) a gyökök összegét, b) a gyökök szorzatát, c) a gyökök reciprokaik összegét, d) a gyökök négyzetének összegét.

31. Az egyenletek megoldása nélkül határozzuk meg az $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ és az $x_1^2 + x_2^2$ kifejezés értékét, ha x_1 és x_2 a következő egyenletek megoldásait jelölik!

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$-2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

32. Határozzuk meg az m -et úgy, hogy a $2x^2 - 11x + m = 0$ egyenlet gyökei között fennálljon, hogy $2x_1 - x_2 = 2$!

33. Határozzuk meg p -t úgy, hogy az $x^2 + px + 20 = 0$ egyenlet két gyökének a különbsége 1 legyen!

34. Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy az $x^2 + 6x + c = 0$ egyenlet egyik gyöke a másik háromszorosa legyen!

35. Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy az $x^2 + 4x + c = 0$ egyenlet egyik gyöke 3 legyen! Mekkora a másik gyök?

36. Határozzuk meg a b értékét úgy, hogy az $x^2 + bx + 12 = 0$ egyenlet egyik gyöke -2 legyen!

37. Mekkora p esetén teljesül, hogy az $x^2 - 3px + p^2 = 0$ egyenlet gyökei négyzetösszege 112?

38. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $3x^2 + px + p - 7 = 0$ egyenletnek a gyökei egymás reciprokaik legyenek.

39. Az $x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenlet gyökeinek meghatározása nélkül írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az adott egyenlet a) gyökeinek háromszorosa, b) gyökeinél hárommal nagyobbak.

40. Határozzuk meg az $x^2 + px + 9 = 0$ egyenletben a p paraméter értékét úgy, hogy

- a) egyik megoldása $x_1 = 3$ legyen
- b) az egyenletnek egyetlen valós gyöke legyen
- c) az egyenlet gyökeinek összege -8 legyen
- d) az egyenlet gyökeinek szorzata 6 legyen

41. Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy az $x^2 - 4x + c = 0$ egyenlet egyik gyöke a másik háromszorosa legyen.

A másodfokú polinom gyöktényezős alakja

42. Alakítsuk szorzattá!

$$x^2 + x - 6 \quad x^2 + 7x + 12 \quad x^2 + 2x - 35 \quad x^2 + 16x + 60 \quad 2x^2 + 7x + 17$$

43. Alakítsuk szorzattá!

$$2x^2 - 3x - 9 \quad 2x^2 + 28x + 98 \quad 3x^2 + 8x + 4 \quad 6x^2 + 7x - 5$$

44. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei

$$3 \text{ és } 4 \quad -2 \text{ és } 7 \quad -3 \text{ és } -6 \quad 1 \text{ és } -5 \quad 6 \text{ és } -6$$

45. Egyszerűsítsük a törtet!

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 2x - 8} \quad \frac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15}$$

46. Bontsuk szorzattá!

$$m^2 - 2m - 3 \quad 2x^2 - 7x + 3 \quad 6a^2 + 5a - 6 \quad -20x^2 + 7x + 6$$

47. Egyszerűsítsd a törtet:

$$\frac{2x+6}{x^2-2x-15} \quad \frac{x^2+8x+12}{x^2+2x} \quad \frac{x^2-4}{2x^2-3x-12}$$

Másodfokúra visszavezethető egyenletek

48. Oldjuk meg a negyedfokú egyenleteket!

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad x^4 + x^2 - 20 = 0 \quad 64x^4 - 20x^2 + 1 = 0$$

49. Oldjuk meg a negyed- és hatodfokú egyenleteket!

$$x^4 + 11x^2 + 28 = 0 \quad x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \quad x^6 - 28x^3 + 27 = 0 \quad x^6 + 9x^3 + 8 = 0$$

50. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$(x-2)^4 - 5(x-2)^2 + 4 = 0 \quad (x+3)^4 - 7(x+3)^2 - 18 = 0$$

51. Oldjuk meg a következő hatodfokú és nyolcadfokú egyenleteket!

$$x^8 - 13x^4 + 36 = 0 \quad x^6 - 2x^3 - 8 = 0 \quad 16x^8 - 257x^4 + 16 = 0 \quad 8x^6 - 9x^3 + 1 = 0$$

Irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek

52. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+4} = 3$$

$$\sqrt{x-5} = 9$$

$$\sqrt{2x-3} = 1$$

$$7 - \sqrt{4x+11} = 0$$

53. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+6} = x$$

$$\sqrt{x+2} = x-4$$

$$\sqrt{3x+1} = 2x-4$$

$$\sqrt{2x+8} = x+4$$

54. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\sqrt{3x-5} = x-1$$

$$\sqrt{5x+5} = 2x-3$$

$$\sqrt{7-3x} = 1-x$$

$$\sqrt{x^2+3x+9} = 3x-8$$

55. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = 5$$

$$\sqrt{5x-6} - \sqrt{x+1} = 1$$

$$\sqrt{3x+3} + \sqrt{2x+6} = 2$$

56. Oldjuk meg a következő irracionális egyenleteket!

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 1$$

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5$$

$$\sqrt{5x+20} + \sqrt{x+8} = 2$$

57. Oldjuk meg a következő irracionális egyenleteket!

$$\sqrt{x+2} = x-4$$

$$\sqrt{x+1} + 1 = x$$

$$\sqrt{x-30} = x-9$$

58. Oldjuk meg az irracionális egyenleteket!

$$\sqrt{2-x} = \sqrt{x+7} - 3$$

$$\sqrt{2x+3} = 1 - \sqrt{3x+3}$$

59. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x - \sqrt{6x-9}} + \sqrt{x + \sqrt{6x-9}} = 6$$

$$2x^2 - 3x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 0$$

60. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket!

$$x+1 < \sqrt{3x+1}$$

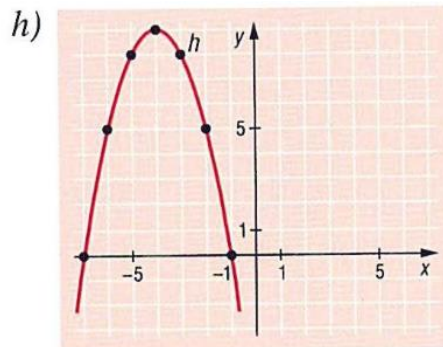
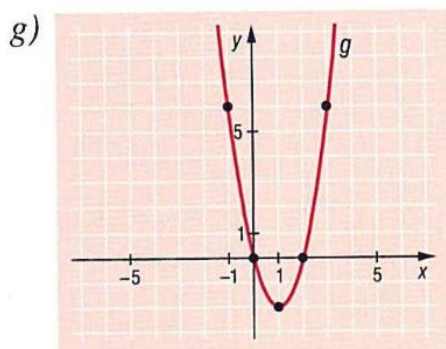
$$\sqrt{5-x} \leq x-3$$

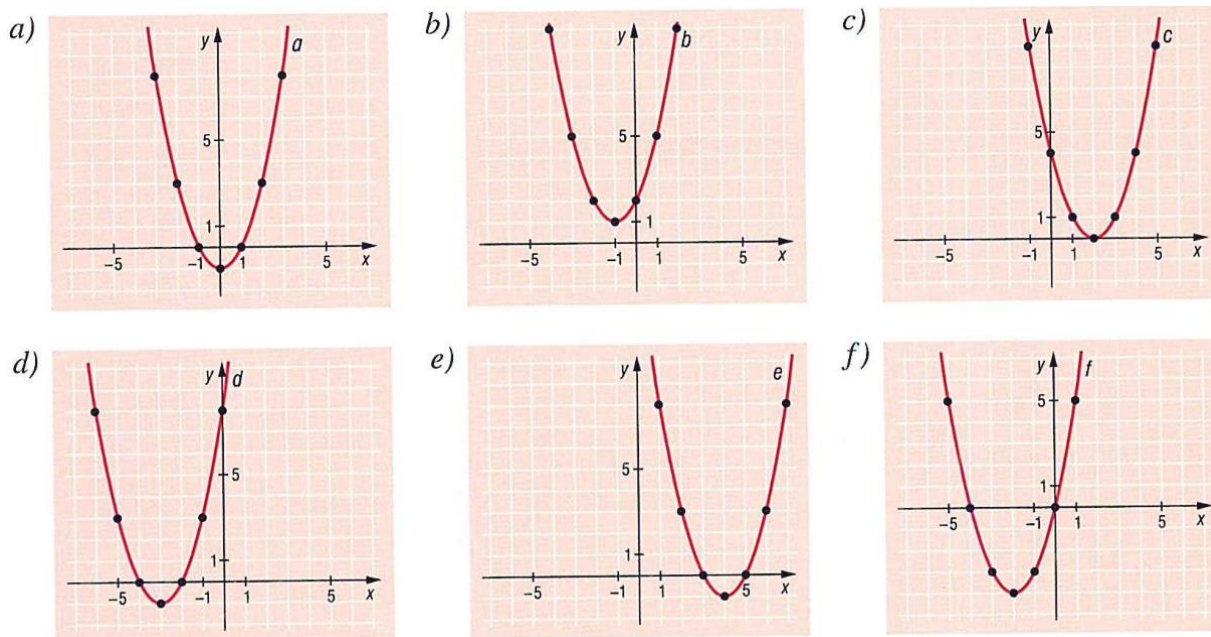
$$\sqrt{13-2x} \leq x+1$$

$$-x < \sqrt{2x+15}$$

Másodfokú függvények

61. Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát!





62. Adjuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy a következő függvények zérushelyeinek száma 0, 1 illetve 2 legyen.

$$f(x) = x^2 + 6x + c \quad g(x) = x^2 - 8x + c \quad h(x) = x^2 - 5x + c$$

63. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezések helyettesítési értéke minden valós x helyen pozitív legyen!

$$x^2 - 14x + p \quad x^2 - 6x + p \quad 5x^2 - 8x + p$$

64. Adott a valós számokon értelmezett $f(x) = x^2 + bx + c$ másodfokú függvény. Határozzuk meg a b és c paraméterek értékét úgy, hogy

- a függvény minimumának értéke 1 legyen az $x = 2$ helyen
- a függvény minimumának értéke 0 legyen az $x = 5$ helyen
- a függvény minimumának értéke -3 legyen az $x = -3$ helyen!

65. Adott a $[-3, 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 - 4x$ függvény. a) Adjuk meg a függvény zérushelyeit! b) Számítsuk ki a szélsőértékhelyét és a szélsőértékét!

66. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^2 - bx + 18$

- Milyen b érték esetén lesz a függvény egyik zérushelye $x = 3$?
- Milyen b érték esetén nincs a függvénynek zérushelye?
- Van-e olyan b érték, hogy a függvény minimumhelye 1, minimumértéke 10?

67. Határozzuk meg a függvények zérushelyeit, szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

$$f(x) = -x^2 - 5x + 6 \quad g(x) = 10x^2 - 20x + 20$$

Másodfokú egyenlőtlenségek

68. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$x^2 - 49 \geq 0$$

$$x^2 - 100 \geq 0$$

$$x^2 - 36 \geq 0$$

$$x^2 - 400 < 0$$

$$x^2 + 114 \geq 0$$

69. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$x^2 + 3x \geq 0$$

$$2x^2 + 5x < 0$$

$$3x^2 - 8x \geq 0$$

$$x^2 - 5x \leq 0$$

$$x^2 - 7 \geq 0$$

70. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$x^2 + 6x - 7 < 0$$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

$$x^2 - 9x + 18 < 0$$

$$x^2 - 8x + 19 \leq 0$$

$$x^2 + 7x + 6 \geq 0$$

71. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$x^2 + 6x + 10 \geq 0$$

$$2x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$4x^2 + 12x + 5 < 0$$

$$x^2 - 8x + 19 \leq 0$$

$$15x^2 + 11x + 2 \geq 0$$

72. Mely egész számok esetén teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

$$x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$-x^2 - x + 12 \geq 0$$

73. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket!

$$-3x^2 - x + 2 \geq 0$$

$$-3x^2 + 5x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 5x - 2 < 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

74. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$\frac{x+5}{x^2+7} < 0$$

$$\frac{-x^2+3x+18}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{x^2-16}{x^2-2x-24} \leq 0$$

$$\frac{(x-5)(x-2)}{3-x} \geq 0$$

75. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket!

$$6x^2 + x < 2$$

$$x^2 + 5x < 8x + 18$$

$$-3x^2 + 5x + 2 \geq 0$$

$$44x^2 + 5 \geq 7x$$

Szöveges feladatok

76. Két négyzet területének összege 493 cm^2 . Az egyik négyzet oldala 5 cm -rel nagyobb, mint a másiké. Mekkora a négyzet oldalai?

77. Két szomszédos szám szorzata 56 -tal több, mint az összegük tízszerese. Melyik ez a két szám?

78. Egy anya és lánya együtt két óra alatt tudja kitakarítani a lakást. Mennyi idő alatt végeznének külön-külön, ha az anyának három órával kevesebb időre van szüksége a takarításhoz, mint a lányának?

79. Hány oldalú az a sokszög, amelynek 12 -vel több átlója van, mint ahány oldala?

80. Egy utazási iroda május 1-től szeptember 9-ig folyamatosan szervez túrákat. Az egyforma hosszú turnusok szünnap nélkül követik egymást. Ha 5 nappal hosszabb turnusokat szerveznének, akkor 10 -zel kevesebb turnus férne ebbe az időszakba. Hány naposak a turnusok?

81. Két kikötő távolsága a folyón 20 km. Egy csónak öt óra alatt tette meg az utat oda-vissza. A folyó sebessége 3 km/óra. Mekkora csónak sebessége állóvízben?
82. Egy egyenlő szárú háromszög szára 3 cm-rel hosszabb az alapnál. Az alaphoz tartozó magasság 12 m. Mekkora a háromszög kerülete?
83. Két gyalogos egyszerre indul A-ból a 24 kilométerre levő B-be. Az egyik egy órával hamarabb ér B-be, mert óránként 2 km-rel D többet tesz meg, mint a másik. Mekkora a két gyalogos sebessége?

Egyenletrendszerek

84. Oldjuk meg az egyenletrendszereket!

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 4 \\ 3x - y^2 = 8 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - 2y = 2 \\ x + 3y = 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + 5y = 14 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = -3 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + 3y = 7 \\ xy = 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x^2 + 3y = -1 \\ x - 5y = 6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

85. Oldjuk meg!
- $$\left. \begin{array}{l} x - y - 3xy = -47 \\ xy = 14 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + 3xy = -3 \\ xy + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Vegyes feladatok

86. Bizonyítsuk be, hogy az $5x^2 - 2(5k + 3)x + 5k^2 + 6k + 1 = 0$ egyenlet gyökeinek különbsége k minden értékére ugyanakkora!
87. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!
- $$\begin{array}{ll} (x+4)^2 + 2(x+3)(x+1) - 5(x+5) = 3x & 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 \\ \sqrt{2x+7} = x+4 & \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{5x-1} \end{array}$$
88. Mely valós számok esetén igazak a következő egyenlőtlenségek?
- $$10x^2 - 2x - 3 \leq 0 \quad -12x^2 + 17x + 5 \geq 0 \quad \sqrt{4x+2} < 2$$
89. Egy derékszögű háromszög területe 30 cm², átfogója 13 cm. Mekkora a háromszög befogói?
90. Bizonyítsd be, hogy a következő egyenletnek a b paraméter minden értékére van megoldása!
- $$(b-2)x^2 + (b+1)x + 3 = 0$$
91. Van-e legkisebb vagy legnagyobb területű a 2 méter kerületű téglalapok között?
92. Bontsunk fel egy 12 hosszúságú szakaszt két részre úgy, hogy maximális, illetve minimális legyen a részek hosszúságának szorzata!
93. A p mely értékére teljesül, hogy az $x^2 - 3px + p^2 = 0$ egyenlet gyökei négyzeteinek összege 112?
- Segítség: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
94. Mennyi az m , ha az $mx^2 - 3x - m = 0$ egyenlet egyik gyöke -2?

95. Oldjuk meg az egyenletrendszert:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

96. Oldjuk meg az egyenletet! $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = x - 1$

97. Oldd meg! $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x + 3} = 1$

98. Az egyenlet megoldása nélkül írjunk fel olyan egyenletet, amelynek a gyökei az $5x^2 - x - 4 = 0$ egyenlet gyökeinek ellentettjei.

99. Oldjuk meg az egyenletrendszert:
$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 17xy \\ x + y = 10 \end{cases}$$

100. Mely b esetén teljesül minden x-re? $(b + 3)x^2 + bx + 1 > 0$

101. Oldjuk meg az egyenletrendszert:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

102. Egyszerűsítsük a következő törtet:
$$\frac{2a^2 + 7a + 3}{6a^2 + a - 1}$$

103. Oldjuk meg: $\sqrt{2 - x} - \sqrt{x - 7} = -3$

104. Mi a következő függvény értelmezési tartománya? $y = \sqrt{6x^2 + 13x - 5}$

105. Az egyenlet megoldása nélkül írjunk fel olyan egyenletet, amelynek a gyökei az $5x^2 - x - 4 = 0$ egyenlet gyökeinek reciprokai.

106. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget: $|2x^2 - 9x + 15| \geq 20$

107. Oldd meg! $\sqrt{x + 8} - \sqrt{5x + 20} = -2$

108. Egy repülőgép menetrend szerint 8 órakor indul az 5600 km-re fekvő célállomásra. Egy alkalommal a köd miatt 9 órakor tudott felszállni. Hogy menetrend szerint érkezhessen a célállomásra, kénytelen volt az átlagsebességét 100 km/óval megnövelni. Számítsuk ki a repülőgép menetrend szerinti menetidejét.

109. Egy motorkerékpáros minden nap 30 km-es utat tesz meg. Az egyik napon 3 perccel hamarabb indult el, de 1 km/ó-val kisebb sebességgel hajtott, mint máskor. Így is időre megérkezett. Mennyi volt ekkor a sebessége?

110. Oldjuk meg: $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x - 1} = 5$

111. Oldjuk meg az egyenletrendszert:
$$\begin{cases} xy + y^2 = 55 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

112. Egyszerűsítsük a $\frac{a^2 - 9a + 14}{2a^2 - 2a - 4}$ törtet.

113. Hogyan kell a c értékét megválasztani, hogy a függvény értékkészlete a 17-nél nem kisebb számok halmaza legyen? $y = x^2 + 10x + 6c$

114. Milyen x számokra van értelmezve a függvény? $y = \sqrt{6x^2 + 13x - 5}$

115. Az m mely értékeire van a következő egyenletnek két különböző valós gyöke?

$$(m-1)x^2 - 2mx - m + 2 = 0$$

116. Oldjuk meg az egyenleteket: a) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

117. Határozzuk meg c értékét úgy hogy a $4x^2 - 8x + c = 0$ egyenletnek egy gyöke legyen.

118. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket: a) $-x^2 - 6x + 27 \leq 0$ b) $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$

119. A p mely értéke esetén teljesül minden x -re, hogy $-2,5x^2 + px + p + 1,6 < 0$?

120. Az m paraméter mely értékei esetén teljesül minden x -re, hogy

$$x^2 - (8m-2)x + 15m^2 - 2m - 7 \geq 0$$

121. Oldjuk meg az egyenletrendszert:
$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ x + y = 4 \end{array} \right\}$$

122. Oldjuk meg grafikusan: $|x^2 - 2x - 3| \leq 3x - 3$

123. Az alábbi egyenlet megoldása nélkül írjunk fel olyan egyenletet, amelynek a gyökei eggyel nagyobbak, mint a $3x^2 - 7x + 1 = 0$ egyenlet gyökei.

124. A q paraméter mely értéke esetén teljesül, hogy az egyenlet egyik gyöke háromszorosa a másiknak? $x^2 - 4x + q = 0$

125. Oldjuk meg az egyenletet: $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = x - 1$

126. Rendezzük nullára és hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő egyenletet.

$$\frac{1}{2}(8 - 2x) \cdot (3x + 4) = 16 \text{ Mivel egyenlő a megoldóképletben szereplő } a, b \text{ és } c?$$

127. Egy 20 000 forintos árut árát először $p\%$ -kal csökkentették, utána ugyanennyi százalékkal felemelték, így végül 100 forinttal lett olcsóbb az eredeti áránál. Írjuk fel egyenlettel az adatok közötti összefüggést, és adjuk meg p értékét.

128. Kiszámoltam, hogy ha a nálam három évvel idősebb bátyám és a nálam négy évvel fiatalabb húgom éveinek számát összeszorozom, akkor ebben az évben a szüleink életkorának összegét kapom. Amikor születtem, akkor az apukám 31, az anyukám 27 éves volt. Hány éves vagyok most?

129. Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív számhoz hozzáadva a reciprokát, legalább kettőt kapunk.

130. Milyen b értékekre lesz a következő egyenleteknek 0, 1, 2 gyöke?

$$-x^2 + bx = 9 \qquad 3x^2 - bx = 38 \qquad 4x^2 + bx = -5$$

131. Milyen számot írunk a c helyére, hogy az $x^2 - 34x + c \leq 0$ egyenlőtlenségnek
a) ne legyen megoldása, b) egy megoldása legyen, c) végtelen sok megoldása legyen?

132. A d paraméter mely értékeire lesz a másodfokú egyenletnek mindkét gyöke 3-nál kisebb?

$$2x^2 - 5dx + 2d^2 = 0 \qquad x^2 + 2dx + 3d = 5$$

133. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

$$2x + 4x^2 + 1 > 5x^2 - 3x$$

$$2x^2 - x + 111 \leq 0$$

$$7x + x^2 + 45 > 3x - 4$$

134. Milyen x -re igazak az egyenletek?

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$$

$$3x - 2\sqrt{x} - 5 = 0$$

$$(x - 5)(2x - 1) = x^2(x - 5)$$

Nehezebb feladatok

135. Mutasd meg, hogy abban a másodfokú egyenletben, amelyben a négyzetes tag együtthatója egy, a két gyök különbségének a négyzete éppen az egyenlet diszkriminánsa.

136. Az $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ egyenlet gyökei egész számok, és a három gyöke közül kettő egyenlő. Oldd meg az egyenletet.

137. Új ismeretlen bevezetésével oldjuk meg: $x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) = 5$

138. Az előző feladatban alkalmazott módszer használjuk itt.

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$$

139. Milyen a értékekre van pozitív megoldása az egyenletnek?

$$x^2 + ax + a - 1 = 0$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

140. Oldjuk meg: $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 24}} = x + 1$ $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 6$

$$\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} = 2$$

141. A p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 - px + q = 0$ egyenlet gyökei valósak, mégpedig az utóbbi egyenlet gyökei eggyel nagyobbak, mint az előbbi egyenlet gyökei. Számítsuk ki p és q értékét.

142. Az a paraméter mely értékére lesz minimális az $x^2 - (3a + 2)x - 7a - 1 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege?

143. Létezik-e olyan racionális p paraméter, hogy a $(p^2 - 5p + 3) \cdot x^2 + (3p - 1) \cdot x + 2 = 0$ másodfokú egyenlet egyik gyöke fele a másiknak?

144. Határozzuk meg a p -t úgy, hogy az $x^2 + px + 20 = 0$ egyenlet két gyökének különbsége 1 legyen.

145. Bizonyítsuk be, hogy az $5x^2 - 2 \cdot (5k + 3) \cdot x + 5k^2 + 6k + 1 = 0$ egyenlet gyökeinek különbsége k minden értékére ugyanakkora.

146. Milyen összefüggés áll fenn a , b és c között, ha a következő egyenletnek van valós megoldása? Mi lesz ekkor a megoldás? $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot x^2 + 2 \cdot (a - b + c) \cdot x + 3 = 0$

147. Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet két gyöke x_1 és x_2 . Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, és $y_s = x_1^3 + x_2^3$

148. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$(x^2 + 6x) \cdot (x^2 + 6x + 4) - 77 = 0 \quad (x^2 - 2x)^2 - 11x^2 + 22x + 24 = 0$$

149. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0 \quad 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$$

150. Oldjuk meg az egész számok halmazán:

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0 \quad x^3 - 7x + 6 = 0 \quad x^3 + 7x^2 + 2x - 40 = 0$$

151. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x - \sqrt{6x - 9}} + \sqrt{x + \sqrt{6x + 9}} = 6 \quad 2x^2 - 3x - 1 + \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = 0$$

152. Egy autógyár két szerelőcsarnokában 400-400 darab egyforma gépkocsit szerelnek össze. A modernebb részleg naponta öttel több autót képes elkészíteni, mint a másik. Hány napig dolgozott egyik-egyik üzemrész, és hány autót gyártottak naponta külön-külön, ha összesen 36 napot dolgoztak?

153. A k kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

154. Oldjuk meg grafikusán a valós számok halmazán:

$$|x^2 - 3x + 2| = 3x - x^2 - 2 \quad |x^2 - 2x + 3| = |2x - 5| + 1$$

155. Oldjuk meg a következő, úgynevezett reciprok egyenleteket a valós számok halmazán, felhasználva, hogy ha $x + \frac{1}{x} = a$ akkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

$$3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 7 \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0 \quad 12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0$$

156. Oldjuk meg a valós számok halmazán: $\frac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7$ $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+8} > 0$

157. Milyenek válasszuk a valós p paramétert, hogy a következő másodfokú egyenlet mindkét gyöke pozitív legyen? $(p - 1)x^2 - 2px + p + 3 = 0$

158. Oldjuk meg a prímszámok halmazán: $x^2 - 2y^2 = 1$

159. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 - y^2 = p^2$ egyenletnek mindig van pozitív egész megoldása ha $p > 2$ egész szám.

160. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{4+x} + \sqrt{9+x} = \sqrt{x+25} \quad \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 \quad \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$$

$$\sqrt{23 + \sqrt{2x - \sqrt{5x^2 - 21x - 68}}} = 5 \quad (x+5)(x+2) + 3\sqrt{x(x+3)} = 0$$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1 \quad 2x^2 + x + \sqrt{2x^2 + x + 1} = 5$$

161. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x^2 - 1} > x - 3 \qquad \sqrt{x(x + 6) + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} > 1$$

162. A p paraméter mely értékei mellett teljesül az $x^2 - \frac{15}{4}x + p^3 = 0$ egyenlet gyökeire,

hogy $x_1^2 = x_2$?

IV. KOMBINATORIKA

1. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
2. Hány 5-tel osztható ötjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
3. Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
4. Hány ötjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
5. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellett üljön?
6. Írjuk fel a TOLL szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?
7. Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány 13-mal kezdődő hétjegyű számot lehet készíteni?
8. Az 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető?
9. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető?
10. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból az iskola szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

I S K O
S K O L
K O L A

11. A MATEMATIKA szó betűinek hány permutációja van?
12. Tíz tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani három különböző tárgyat, ha egy tanuló legfeljebb egy tárgyat kaphat?
13. Egy 36-os létszámú osztályban egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki azzal a feltétellel, hogy egy tanuló csak egy tárgyat nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

14. Egy 30-as létszámú osztály vezetőséget választ: titkárt, titkárhelyettest, kultúrfelelőst, sportfelelőst és gazdasági felelőst. Hányféleképpen történhet ez?
15. Az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből hány ötjegyű számot állíthatunk elő, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?
16. Tizenöt tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat úgy, hogy egy tanuló több tárgyat is kaphat?
17. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból az ISKOLAI szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

I S K O L A I
S K O L A I
K O L A I
O L A I
L A I
A I
I

18. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?
19. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelyben az 5-ös előfordul?
20. Egy 32 lapos magyar kártyából egymás után kihúzzunk 6 lapot. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a kihúzott lapok sorrendje is számít?
a) visszatevés nélkül húzzunk, b) minden húzás után a kihúzott lapot visszatesszük
21. Egy hatelemű halmaznak hány háromelemű részhalmaza van? Írjuk le ezeket.
22. Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei csökkenő sorrendben következnek egymás után, egyenlő számjegyeket nem engedve meg?
23. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány ötelemű részhalmaza van?
24. Egy hatelemű halmaznak hány részhalmaza van?
25. Egy nyolcelemű halmaznak hány valódi részhalmaza van?
26. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely legalább hételemű?
27. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek negyedosztályú kombinációit.
28. Egy hétszemélyes társaságban mindenki mindenkivel kezecskéz. Hány kézfogás ez összesen?
29. Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény?
30. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket: $\frac{n!}{(n-3)!}$ $\frac{n!}{n(n-1)}$
31. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket: $(n+2)(n+1)!$ $\frac{(n-2)!}{n-2}$

32. Piros, fehér, zöld és kék színű anyagokból zászlókat készítünk. Minden zászló vízszintes csíkokból áll, és a szomszédos csíkok nem lehetnek azonos színűek. Hány különböző zászlót készíthetünk, ha a) egy-egy zászlón négy csíknak kell lennie, b) egy-egy zászlón három csíknak kell lennie, c) egy-egy zászlón két csíknak kell lennie?

33. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a BUDAPEST szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

B U D A P
U D A P E
D A P E S
A P E S T

34. Egy szabályos játékkocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk. Dobjuk fel ezt a játékkockát négyszer egymás után. A dobások eredményét a dobások sorrendjében írjuk egymás mellé.

a) Hányféle négyjegyű számhoz juthatunk így? b) Hányféle 1-re végződő négyjegyű számot kaphatunk?

35. Egy szabályos játékkocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk. Dobjuk fel ezt a játékkockát ötször egymás után és a dobások eredményét írjuk rendre egymás mellé. Hányféle 10-zel osztható ötjegyű számhoz juthatunk így?

36. Egy szabályos játékkockával egymás után ötször dobunk. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben legalább egyszer hatost dobunk?

37. Hányféleképpen olvasható a következő elrendezésben a SZOLNOK szó, ha csak lefelé, és rézsút balra, illetve jobbra haladhatunk?

S
Z Z
O O O
L L L L
N N N
O O
K

38. Egy 32-es létszámú osztályban klubdelutánt rendeznek, ahol a tanulók között négy tombolatárgyat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha:

- a) a tárgyak egyenlők, és egy tanuló legfeljebb egy tárgyat nyerhet
- b) a tárgyak egyenlők, és egy tanuló több tárgyat is nyerhet
- c) a tárgyak különbözőek, és egy tanuló legfeljebb egy tárgyat nyerhet
- d) a tárgyak különbözőek, és egy tanuló több tárgyat is nyerhet?

39. Egy szabályos játékkockát hatszor egymás után feldobunk. A kapott eredményeket rendre egymás mellé írjuk. a) Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek? b) Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike előfordul?

40. Piros, fehér és fekete játékkockát helyeztünk el egy dobozba. Kettőt kiveszünk és dobunk velük. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

41. Hány 5-re végződő ötjegyű szám van?

42. Egy 32-es létszámú osztály az iskolai küldötttervezetle hat küldöttet választ. Hányféleképpen történhet ez?
43. Egy 25-ös létszámú közösség háromtagú vezetőséget választ: titkárt és két vezetőségi tagot.
a) Hányféleképpen történhet ez? b) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Nagy Ági legyen a titkár? c) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Nagy Ági tagja legyen a vezetőségnek?
44. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy ász?
45. Egy 25 főből álló társaság tagjai között egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki. Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha egy személy több tárgyat is nyerhet?
46. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány olyan nyolcjegyű számot készíthetünk, amelyben a 4-esek száma egyenlő az 5-ösök számával?
47. A 4-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány 9-cel osztható nyolcjegyű szám készíthető?
48. Hány egyenest határoz meg 25 olyan pont, amelyek közül 3-3 nem esik egy egyenesbe?
49. Adott a síkban 25 pont, amelyek közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány háromszöget határoznak meg?
50. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből készíthető ötjegyű számok között hányban fordul elő az 1-es számjegy, ha egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?
51. A BKK járművein régen a jegyeket olyan lyukasztókkal kezelték, mellyel egy 3x3-as mezőben elrendezett 9 számjegyből 2, 3, illetve 4 mezőt kilyukasztottak ki. Hányféleképpen állíthatók be ezek a lyukasztók a követelményeknek megfelelően?
52. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A, B és C egymás mellett üljön?
53. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A a B mellé és C a D mellé ül?
54. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A ne kerüljön B mellé?
55. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A a pad szélére ül?
56. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A ne kerüljön a pad szélére?
57. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett négy férfi és három nő úgy, hogy a férfiak és a nők felváltva következzenek egymás után?
58. Hány különböző gyöngyöt lehet készíteni 20 gyöngyszemből, ha van:
a) 10 fehér és 10 kék, b) 5 fehér és 15 kék, c) 8 fehér és 12 kék?
Az azonos színű gyöngyszemek teljesen egyformák.

- 59.** Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 6 piros és 9 fehér golyót, ha csak azokat a húzásokat tekintjük különbözőnek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?
- 60.** Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 5 piros, 7 fehér és 3 kék golyót, ha csak az olyan húzásokat tekintjük különbözőknek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?
- 61.** 5 piros, 2 fehér és 2 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy a 2 kék golyó egymás mellett legyen?
- 62.** Dobjunk fel két szabályos játékkockát egymástól függetlenül. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben a kapott pontok összege 8?
- 63.** Hány „szót” képezhetünk az A, E, I, O, U magán- és a B, C, D, F mássalhangzókból úgy, hogy minden „szóban” 4 magán- és 3 mássalhangzó legyen, két magán-, illetve két mássalhangzó egymás mellé ne kerüljön, és minden mássalhangzó csak egyszer szerepeljen?
- 64.** Egy-egy cédulára írjuk fel rendre a 0, 1, 2 számokat. A cédulákat tegyük egy dobozba. Húzzunk ki egy cédulát, és jegyezzük fel a kihúzott számot. Ezután tegyük vissza a cédulát és ismételjük meg az eljárást még négyszer. Hány esetben lehet az ötödik húzás után a kihúzott számok összege:
a) éppen 6, b) 6-nál nagyobb?
- 65.** Az 1, 2, 3, ..., 15 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben a) az 1, 2 számok, b) az 1, 2, 3 számok csökkenő sorrendben kerülnek egymás mellé?
- 66.** Az 1, 2, 3, ..., 25 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az
a) 1, 2, 3, ..., 10 számok
b) az 1, 2, 3, ..., 15 számok egymás mellé kerülnek növekvő sorrendben?
- 67.** Hány 5-tel osztható hétjegyű szám készíthető az 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 számjegyekből?
- 68.** Hány hétjegyű páratlan szám készíthető az 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 számjegyekből?
- 69.** Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány olyan hétjegyű számot lehet készíteni, amelyben a kettes számjegyek egymás mellett állnak?
- 70.** Hány nyolcjegyű szám képezhető a 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 számjegyekből?
- 71.** Egy csomag 32 lapos magyar kártyából húzzunk ki találmra öt lapot. Hány esetben lesz a kihúzott öt lap közül három hetes?
- 72.** Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyát négy játékos között szétosztani úgy, hogy mindegyik nyolc lapot kapjon?
- 73.** A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy
a) legalább egy zöld színű lap, b) legfeljebb három hetes, c) a zöld hetes a kiválasztott lapok között legyen?
- 74.** Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány négyjegyű számot állíthatunk elő:
a) egy számjegy felhasználásával
b) két különböző számjegy felhasználásával
c) három különböző számjegy felhasználásával
d) négy különböző számjegy felhasználásával?

75. Egy dobozban 10 cédula van, rendre 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után négy cédulát húzunk ki úgy, hogy a kihúzott cédulákat a húzás után nem tesszük vissza. A kihúzott cédulákon lévő számjegyeket a kihúzás sorrendjében írjuk egymás mellé. Hány esetben kapunk:

a) páratlan négyjegyű számot, b) 10-zel osztható négyjegyű számot, c) 25-tel osztható négyjegyű számot?

76. 16 csapatot területi alapon két nyolcas csoportba osztottak. Az egyes csoportok első, második, illetve harmadik helyezette játszik az első-második, harmadik-negyedik, illetve ötödik-hatodik helyért a döntőben. Hányféle döntő lehetséges?

77. Egy sakkversenyen az egyik versenyzőnek az ötödik forduló után 3 pontja van. Hányféleképpen érhet el a versenyző ezt a 3 pontot, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben érte el eredményeit? (A sakkversenyen győzelem esetén 1, döntetlen esetén 0,5 pontot kapnak.)

78. Valamely sakkversenyen egy játékosnak a hatodik forduló után 4 pontja van. Hányféleképpen jöhetett létre ez az eredmény? (Nyert játszma 1 pont, döntetlen 0,5 pont, vesztes játszma 0 pont.)

79. Egy pályázatra 20 pályamű érkezett, amelyek közül 9-et nők és 11-et férfiak küldtek be. Három pályamunkát díjaznak, egyenként 5000 Ft-tal. (A díjakat megosztani nem lehet.)

a) Hány eset lehetséges a díjazás szempontjából?

b) Hány esetben lehet a díjazottak között egy nő?

c) Hány esetben lehet a díjazottak között három férfi?

80. Egy dobozban hat különböző tárgy van. Találomra kiveszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy egyet sem, vagy lehet mindet is). Hány különböző eset jöhet létre?

81. Egy dobozban 15 különböző tárgy van. Találomra kiveszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem). Hány különböző eset jöhet létre?

82. 12 cédulára írjuk fel rendre 1-től 12-ig a számokat. a) Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy egyenlő paritású számok ne kerüljenek egymás mellé? b) Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy az első hat helyen csak páros szám álljon? c) Hány különböző hetes csoport alkotható úgy, hogy a csoportban három páros szám társul négy páratlannal?

83. Hányféleképpen lehet hat tanuló között kilenc különböző tárgyat kiosztani úgy, hogy valamelyik tanuló hármat, valamelyik kettőt és a többi egy-egy tárgyat kapjon?

84. 200 csavar közül 20 selejtes. A 200 csavarból tízet kivéve, hány esetben lesz köztük:

a) legalább négy selejtes, b) legfeljebb négy selejtes, c) 20%-a selejtes?

85. Hányféleképpen helyezkedhet el 15 tanuló három darab ötszemélyes csónakban, ha egy-egy csónakon belül az elhelyezkedést figyelmen kívül hagyjuk?

86. Egy osztályból 15 tanuló kirándulni megy két napra. Az éjszakát egy turistaházban töltik, ahol három négy személyes és egy három személyes szobát kapnak.

a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe?

b) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést is figyelembe vesszük?

87. A minden lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány két-, hány három-, hány négy- hány öttalálatos szelvény van?

88. 150 darab készülék között öt darab hibás van. Hányféleképpen lehet húsz készüléket úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott készülékek között 0, 1, 4, 5 hibás legyen?

- 89.** 200 csavar közül nyolc selejtes. Hányféleképpen választhatunk ki közülük öt csavart úgy, hogy
a) ne legyen köztük egyetlen selejtes csavar sem, b) egy selejtes és négy hibátlan legyen, c) két selejtes és három hibátlan legyen, d) mind az öt selejtes legyen?
- 90.** A lottón az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül húznak ki ötöt. Tekintsük az így keletkezett számötösöket. Ezek hány százalékában fordul elő egy rögzített szám?
- 91.** Egy kosárban 12 alma és 10 barack van. Jancsi kivesz vagy egy almát, vagy egy barackot, ezután Juliska választ egy almát és egy barackot is. Mikor van Juliskának több választási lehetősége, ha Jancsi almát vett, vagy ha barackot?
- 92.** Hányféleképpen állhat a tesitanár előtt kettesével egy oszlopban a 18 fiúból és 18 lányból álló osztály, ha két fiú és két lány nem kerülhet egymás mellé?
- 93.** A sportnapon a kötélhúzás versenyen egy osztályból egy öt fős fiú és egy öt fős leánycsapatot kell kiállítani. Hányféleképpen lehet megtenni ezt a mi osztályunkban?
- 94.** Határozzuk meg azoknak az ötjegyű számoknak a számát, amelyek legalább egy egyest tartalmaznak.
- 95.** Az iskolai métabajnokságra benevezett a 9. a osztály is. Hányféleképpen lehet összeállítani a tízfős csapatot úgy, hogy a) 3 lány és 7 fiú szerepeljen benne, b) 3 fiú és 7 lány szerepeljen benne, c) legalább egy fiú szerepeljen benne?
- 96.** Száz darab készüléknek a 12%-a hibás. Hányféleképpen lehet tíz készüléket úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott készülékek között a) ne legyen hibás, b) mind hibás legyen, c) pontosan öt hibás legyen, d) legalább egy hibás legyen?

Nehezebb feladatok

- 97.*** Egy $2 \times 2 \times 2$ egységoldalú kockarácson egységnyi lépésekkel lépegetve el akarunk jutni valamelyik testátló egyik végpontjából a másik végpontba. Hányféleképpen tehetjük meg ezt, ha soha nem lépünk visszafelé?
- 98.*** Egy $2 \times 2 \times 2$ egységoldalú kocka felszínén az oldalakkal párhuzamos, egységnyi lépésekkel lépegetve el akarunk jutni valamelyik testátló egyik végpontjából a másik végpontba. Hányféle-képpen tehetjük meg ezt, ha soha nem lépünk visszafelé?
- 99.*** Hányféleképpen juthatunk el egy 10 fokból álló lépcső aljáról a tetejére, ha a lépcsőket ötletszerűen egyesével vagy kettesével vesszük?
- 100.*** Hány olyan hatjegyű különböző számjegyekből álló szám van, amelyben négy páratlan számjegy szerepel?
- 101.*** Egy 34 fős szervezet 5-tagú vezetőséget választ: 1 titkárt és 4 vezetőségi tagot. Hányféle kimenetele lehet a választásnak? (A titkárt a vezetőségi tagoktól megkülönböztetjük, da a 4 vezetőségi tag között nem teszünk különbséget.)
- 102.*** Csupa páros számjegyből hány négyjegyű szám állítható elő?

103.* 32 lapos magyar kártyából kiválasztunk 10 lapot. Hányféleképpen fordulhat elő ilyen kiosztásban, hogy a 4 ász a 10 lap között legyen?

104.* Egy pályázatra 10 pályamunka érkezett, és 6 egyenlő díj van. Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni, ha a díjak felezése, vagy megosztása tilos?

105.* Hány olyan hatjegyű szám létezik, amelyben van két azonos számjegy? És hány ilyen 15-jegyű szám létezik?

106.* Legfeljebb hány pontban metszik egymást egy konvex 9-szög átlói?

107.* A polcon egymás mellett 12 könyv van. Hányféleképpen lehet kiválasztani 4-et úgy, hogy ne legyen közöttük két egymás melletti?

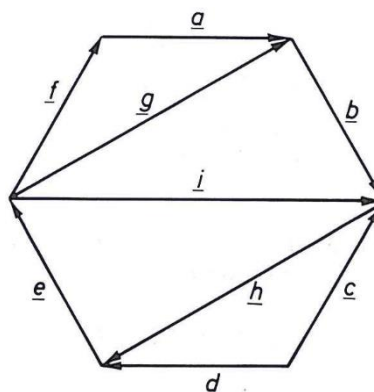
108.* Egy részeg postás figyelmetlenül oszt szét öt levelet azok címzettjeinek. Hányféleképpen teheti ezt meg úgy, hogy senki se a sajátját kapja meg? És úgy, hogy pontosan 1, 2, 3, 4 ill. 5 címzett kapja meg a saját levelét?

V. VEKTOROK

Műveletek vektorokkal

1. Az ábrán jelölt vektorok közül válasszuk ki a) az egyenlőket, b) az ellentetteket!

2. Az ábrán állítsuk elő a) a **g**-t az **a** és az **f** segítségével, b) a **h**-t az **a** és az **f** segítségével!



3. Egy szabályos hatszög egyik csúcsából a többi öt csúcsba mutató vektorok legyenek rendre **a**, **b**, **c**, **d**, **e**. Rajzoljuk meg a következő vektorokat!

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad \mathbf{a} - \mathbf{c} \quad \mathbf{c} - \mathbf{a} \quad \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{b}$$

4. Egy téglalap csúcsai legyenek A, B, C, D. Rajzoljuk meg a következő vektorokat!

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

5. Egy téglalap csúcsai legyenek A, B, C, D. Rajzoljuk meg a következő vektorokat!

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \quad \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$$

6. Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Rajzoljuk meg a következő vektorokat!

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} \quad \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \quad \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} \quad \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}$$

7. Legyen O az ABC háromszög köré írt körének középpontja. Rajzoljuk meg a következő vektorokat!

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor egyenlő hosszú, akkor az összegük és a különbségük merőleges egymásra!
9. Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és a különbsége egyenlő hosszú, akkor a két vektor merőleges egymásra!
10. Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor összege és a különbsége egyenlő hosszú!
11. Az ABCD paralelogramma síkjában O egy tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$
12. Tekintsük az ABCD paralelogrammát. Lássuk be, hogy

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$$
13. Az ABCD paralelogramma A, B, C csúcsaihoz egy tetszőleges O pontból rendre az **a**, **b**, **c** vektorok vezetnek. Állítsuk elő ezek segítségével az $\overrightarrow{OD}$ vektort!
14. Az ABC háromszög A csúcsához egy tetszőleges O pontból az **a**, a B csúcsához a **b**, a BC felezőpontjához pedig a **p** vektor vezet. Állítsuk elő az **a**, **b**, **p** segítségével az O-ból a C-hez vezető $\overrightarrow{OC}$ vektort és az $\overrightarrow{AC}$ vektort!
15. Adott az **a** vektor. Rajzoljuk meg a $2\mathbf{a}$, $-2\mathbf{a}$, $1,5\mathbf{a}$ vektorokat!
16. Adottak az **a** és **b** vektorok. Rajzoljuk meg a következő vektorokat!
 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} \quad \mathbf{a} - 2\mathbf{b} \quad \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \quad 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$
17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög csúcsainak helyvektorai **a**, **b** és **c**, akkor a súlypontjának a helyvektora $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$.
19. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy háromszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő ugyanabból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével!
20. Az ABCD négyszög oldalvektorai legyenek $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$. Állítsuk elő ezek segítségével az átlók felezőpontjait összekötő vektort!
21. Egy kocka A csúcsából induló élvektorok legyenek **a**, **b** és **c**. Határozzuk meg az A-ból a lapközéppontokba vezető vektorokat!
22. Egy téglalap csúcsai ebben a sorrendben A, B, C és D. Rajzoljuk meg a következő vektorokat!
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \quad 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
23. Egy paralelogramma átlóinak O metszéspontjából az A és B csúcsokba mutasson az **a** és a **b** vektor. Fejezzük ki a paralelogramma oldalainak vektorait az **a** és a **b** vektorokkal!

24. Három egyenlő hosszú vektor összege nullvektor. Mekkora szöget zárnak be a vektorok egymással?

25. Fejezzük ki az ABCD rombusz $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$ vektorait az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AD}$ vektorokkal!

26. Egy kocka A csúcsából induló és az A-t tartalmazó lapok középpontjába mutató vektorok legyenek **e**, **f** és **g**. Állítsuk elő ezek segítségével az A csúcsból kiinduló élvektorokat!

27. A sík egy O pontjából az ABC háromszög A csúcsába az **a**, B csúcsába a **b**, vektor, a BC oldal felezőpontjába az **f** vektor mutat. Állítsuk elő ezen vektorok segítségével a következő vektorokat!
 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC}$

28. A sík egy O pontjából az AB szakasz végpontjaiba mutató vektorok **a** és **b**. Írjuk fel ezek segítségével az AB szakasz azon P pontjába mutató vektort, amely AB-t 1:2, 2:3, 1:10 arányban osztja!

Vektorok a koordinátarendszerben

29. Legyen **a**(3, 5) **b**(-4, 2) **c**(-2, -5). Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit!

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \mathbf{a} - \mathbf{c} \quad \mathbf{a} - 2\mathbf{b} \quad \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} \quad \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$$

30. Egy háromszög csúcsai A(8, 2) B(6, 9) C(4, -3). Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ koordinátáit!

31. Egy négyszög csúcsai A(6, 4) B(-2, 5) C(-6, -3) D(1, -8).

Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ koordinátáit, majd adjuk össze ezt a négy vektort!

32. Számítsuk ki a AB, CD, EF szakaszok felezőpontjainak koordinátáit!

$$A(6, 6) \quad B(2, 2) \quad C(4, 10) \quad D(12, 3) \quad E(-2, -6) \quad F(-3, -4)$$

33. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai A(-2, 1) B(4, -3) C(2, 3).

Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit!

34. Határozzuk meg az A(1, 2) B(2, 6) C(6, 4) háromszög súlyvonalainak a hosszát!

35. Osszuk fel az A(5, 0) B(4, 3) pontokat összekötő szakaszt A-tól számított 3:4 arányban! Számítsuk ki az osztópont koordinátáit!

36. Számítsuk ki az AB szakasz A-hoz közelebb levő harmadolópontjának koordinátáit!

$$A(1, 3) \quad B(5, -2)$$

37. Osszuk fel az A(2, -2) B(6, 14) pontokat összekötő szakaszt négy egyenlő részre!

38. Az AB szakaszra B-n túl, majd A-n túl rámérjük az AB szakasz felét. Számítsuk ki az így kapott pontok koordinátáit, ha A(4, 3) B(6, -1)!

39. Számítsuk ki az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit!

$$A(8, 2) \quad B(6, 6) \quad C(0, -2) \qquad A(6, 2) \quad B(-4, 1) \quad C(2, -3)$$

40. Határozzuk meg az $A(2, 2) \quad B(2, 4) \quad C(6, 4)$ csúcsokkal megadott háromszög oldalainak a hosszát és a súlypontjának a koordinátáit!

41. Bizonyítsuk be, hogy a következő pontok paralelogrammát határoznak meg!

$$A(1, 3) \quad B(4, 7) \quad C(2, 8) \quad D(-1, 4) \qquad A(1, 2) \quad B(-5, 1) \quad C\left(-6, -\frac{1}{2}\right) \quad D\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

42. Adott egy paralelogramma három csúcsa, határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit! Több megoldás van. a) $A(0, 0) \quad B(3, 1) \quad C(1, 3)$ b) $A(1, 4) \quad B(3, 2) \quad C(6, 5)$

43. Számítsuk ki a következő pontok távolságát!

$$A(1, 3) \quad B(4, 7) \qquad C(-3, 2) \quad D(1, 5) \qquad E(-6, -2) \quad F(-1, -9)$$

44. Számítsuk ki a négyzet hiányzó csúcsainak a koordinátáit, ha két szomszédos csúcsa:

$$\text{a) } A(0, 5) \quad B(3, 1) \qquad \text{b) } A(4, 8) \quad B(7, 4)$$

45. Mekkora a háromszög oldalai? a) $A(2, 3) \quad B(5, 7) \quad C(10, -3)$, b) $A(3, 4) \quad B(-7, -6) \quad C(5, -1)$

46. Egy háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái $F(-2, 3) \quad G(4, 6) \quad H(5, 2)$. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak a koordinátáit!

47. Egy ABCD rombusz hosszabb átlója kétszerese a rövidebbnek, ez utóbbi végpontjai:

$$A(-3, 7) \quad C(5, 11). \text{ Határozzuk meg a B és a D csúcs koordinátáit!}$$

48. Egy téglalap hosszabb oldala háromszorosa a rövidebbnek. Az egyik hosszabb oldal végpontjai:

$$A(-2, 4) \quad B(7, 16). \text{ Számítsuk ki a téglalap másik két csúcsának koordinátáit!}$$

49. Adottak a $\mathbf{a}(-1, 3) \quad \mathbf{b}(2, 7)$ vektorok. Számítsuk ki az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ $\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$ vektor koordinátáit.

50. Döntsük el számítással, hogy egy egyenesen van-e a következő három pont!

$$A(-1, 3) \quad B(-4, 7) \quad C(2, 9)$$

51. Egy ABCD négyzet két átlellenes csúcsának koordinátái $A(3, 5) \quad C(4, 2)$. Számítsuk ki a B és D csúcs koordinátáit!

52. Egy négyzet egyik csúcsa $A(5, 2)$, középpontjának koordinátái $K(-3, 8)$. Számítsuk ki a négyzet hiányzó csúcsainak koordinátáit!

53. Egy paralelogramma két szomszédos csúcsának koordinátái $A(9, -3) \quad B(0, 3)$, a paralelogramma középpontjának koordinátái $K(1, 6)$. Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit!

54. Egy ABCD négyzet két átlellenes csúcsának koordinátái $A(1, 2) \quad C(4, 8)$. Számítsuk ki a B és D csúcs koordinátáit!

55. Egy ABCD téglalap két szomszédos csúcsának koordinátái $A(-3, 4) \quad B(9, 5)$. Számítsuk ki a C és a D csúcs koordinátáit, ha még azt is tudjuk, hogy az AB oldal háromszor olyan hosszú, mint a BC.

56. Számítsuk ki a háromszög területét, ha csúcsainak koordinátái

$$A(2, 3) \quad B(5, 7) \quad C(10, -3) \qquad A(3, 4) \quad B(-7, -6) \quad C(5, -1)$$

57. Igazoljuk, hogy a következő három pont egy egyenesre esik. $A(4, 7)$ $B(5, 9)$ $C(2008, 4015)$
58. Az ABCD rombuszban $A(11, 8)$ $C(-9, 8)$.
Számítsuk ki a B és D csúcsok koordinátáit, ha $AC = 2BD$.
59. Az O középpontú kör AB és CD húrjai merőlegesek egymásra és a metszéspontjuk M.
Igazoljuk, hogy $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OM}$
60. a) Számítsuk ki az $A(2, 7)$ $B(1, 1)$ $C(3, 6)$ háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit!
b) Lássuk be számítással, hogy a középvonal háromszög egyik oldala párhuzamos a háromszög egyik oldalával és hossza annak fele!
61. Adjuk meg az $\vec{AB}$ vektort, ha a) $A(4, 7)$ $B(-9, 3)$ b) $A(9, -5)$ $B(-8, 5)$ c) $A(\sqrt{3}, 13)$ $B(\sqrt{12}, 7)$
62. Adott a koordináta-rendszerben három pont: $A(4, 1)$ $B(-2, 5)$ $C(5, 7)$. Adjuk meg az $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ vektorok koordinátáit, majd a három vektor összegének a koordinátáit!
63. Legyen $\mathbf{a}(1, -3)$ $\mathbf{b}(-0,5, 1,5)$ $\mathbf{c}(5; 3,4)$. Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:
 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ $5\mathbf{b} + \frac{3}{2}\mathbf{c}$ $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4}$
64. Az ABC háromszög súlypontja S. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit, ha
 $A(-5, -2)$ $B(3, 1)$ $S(-\frac{4}{3}, 2)$
65. Az ABCD rombusz egyik átlója a másik háromszorosa. A hosszabb átló végpontjai $A(5, -7)$ $C(23, 11)$. Számítsuk ki a B és a D csúcs koordinátáit!
66. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának két végpontja $A(-3, 2)$ $B(11, 4)$.
Határozzuk meg a hiányzó csúcsát.
67. Egy téglalap egyik oldala háromszorosa a másiknak. Az egyik hosszabb oldal két szomszédos csúcsa $A(-3, 4)$ $B(9, 5)$. Határozzuk meg a téglalap hiányzó csúcsait.

Vegyes feladatok

68. Vegyünk fel a kockás papíron négy vektort ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$) úgy, hogy a kezdő- és végpontjaik rácspontok legyenek. A vektorösszeadás szabálya alapján rajzoljuk meg a következő vektorokat
 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{c} + \mathbf{d}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $(\mathbf{d} + \mathbf{b}) - (\mathbf{c} + \mathbf{b})$
69. Az ABC háromszög S súlypontjából induló $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok rendre a háromszög A, B, C csúcsaiba mutatnak. A háromszög oldalfelező pontjai F, G, H. Fejezzük ki $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok segítségével a következő vektorokat: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$, $\vec{SF}$, $\vec{SG}$, $\vec{SH}$.
70. Vegyünk fel a kockás papíron két ($\mathbf{t}$ és $\mathbf{p}$) vektort úgy, hogy a kezdő- és végpontjaik rácspontok legyenek. A vektorösszeadás szabálya alapján rajzoljuk meg a következő vektorokat.
 $2\mathbf{t} + \mathbf{p}$, $\mathbf{t} + 2\mathbf{p}$, $0,5\mathbf{t} - \mathbf{p}$, $-2\mathbf{t} - \mathbf{p}$
72. Adottak az $A(-3, 1)$, $B(4, 2)$ pontok. Rajzoljuk meg a következő vektorokat: $\frac{1}{2}\vec{AB}$, $2\vec{AB}$, $-\frac{3}{2}\vec{AB}$

73. Egy háromszög síkjának tetszőleges pontjából a háromszög csúcsaiba mutató vektorok **a**, **b**, **c**. Határozzuk meg ugyanabból a pontból a háromszög oldalfelező pontjaiba mutató vektorok összegét **a**, **b**, **c** segítségével.

74. Bontsuk fel a háromszög egyik súlyvonalvektorát a kezdőpontjából kiinduló oldalvektorokkal párhuzamos összetevőkre.

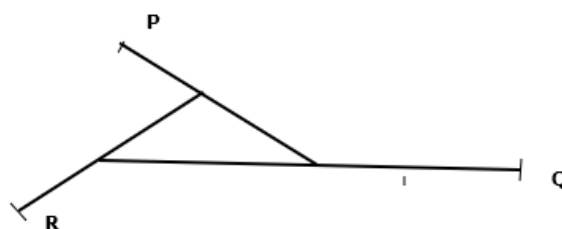
75. Legyen M az ABCD négyszög AC átlójának, N a BD átlójának felezőpontja. Igazoljuk, hogy

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}$ b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

76. Adottak az A, B, C pontok. Hol van az a P pont, amelyre $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ teljesül?

77. Adottak az A, B, C pontok. Hol van az a P pont, amelyre $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ egy előre megadott **p** vektorral egyenlő.

78. Hosszabbítsuk meg egy háromszög oldalait az oldalhossz felével az ábra szerint. Így a P, Q, R pontokhoz jutunk. Bizonyítsuk be vektorokkal, hogy a PQR háromszög súlypontja azonos az eredeti háromszög súlypontjával.



79. Lássuk be, hogy egy tetszőleges paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalainak a négyzetösszegével.

Nehezebb feladatok

80. Bizonyítsuk be, hogy ha egy O pontból az AB szakasz végpontjaihoz az **a** és a **b** vektorok vezetnek, akkor az AB szakaszt $\lambda : \mu$ arányban osztó P pontba a $\frac{\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{\mu + \lambda}$ vektor vezet.

81. Legyen az ABC háromszög súlypontja S, az XYZ háromszögé pedig Q. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = 3\overrightarrow{SQ}$$

82. Egy háromszög köré írt körének O középpontjából a csúcsokhoz mutató vektorok legyenek **a**, **b**, **c**. Bizonyítsuk be, hogy az O-ból felmért $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{m}$ vektor végpontja a háromszög magasságpontja.

83. Jelölje F a háromszög köré írt köre középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy F a háromszög minden oldalfelező pontjától egyenlő távolságra van.

84. Egy négyszög súlypontjának nevezzük azt a pontot, amelynek helyvektora a csúcsokhoz vezető vektorok összegének a negyede. Bizonyítsuk be, hogy a súlypont független a kezdőpont választásától, azaz tetszőleges kezdőpont esetén az így definiált vektor végpontja mindig ugyanaz.

85. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög középvonalai felezve metszik egymást.

86. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög súlypontja felezi az átlók felezőpontját összekötő szakaszt.

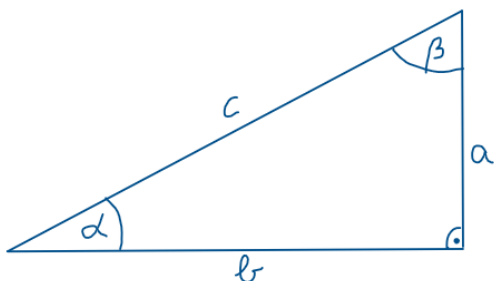
87. Az ABCD négyszög oldalvektorai legyenek $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$. Állítsuk elő ezek segítségével az átlók felezőpontját összekötő vektort.

88. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalain jelöljünk ki egy-egy P, Q, R pontot. Bizonyítsuk be, hogy ha ezek a megfelelő oldalakat azonos arányban osztják, akkor AP, BQ, CR szakaszokat egy háromszöggé lehet összetolni.

89. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög súlypontján áthaladó tetszőleges egyenesre a csúcsokból merőlegeseket bocsátunk, akkor az egyenes egyik oldalán levő merőleges távolság egyenlő a másik oldalon levő két merőleges távolság összegével.

VI. TRIGONOMETRIA

Hegyszögek sinusa, cosinusa és tangense



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

1. Egy derékszögű háromszög átfogója 12 cm-es és az egyik szöge 23° -os. Számítsuk ki a befogóinak a hosszát.

2. Valamely derékszögű háromszög átfogója 46,5 cm hosszú és egyik szöge $12^\circ 25'$ -es. Számítsuk ki a befogóinak a hosszát.

3. Egy szelíd derékszögű háromszög egyik szöge $36,18^\circ$ -os és ezzel a szöggel szemközt 8,3 cm hosszúságú befogó található. Számítsuk ki az átfogójának és a másik befogójának a hosszát.

4. Valamely derékszögű háromszög átfogójának és egyik befogójának a hosszát keressük. Valaki a tudomásunkra hozta, hogy a háromszög egyik szöge $42^\circ 53'$ és ezzel a szöggel szemközt 16,2 m-es befogó található.

5. Egy boldog derékszögű háromszögben az egyik befogó 26 dm, a mellette levő szög $18,6^\circ$. Határozzuk meg a másik befogó hosszát.

6. Egy derékszögű háromszög egyik szöge $41^\circ 17'$, e szöggel szemközt 10,6 cm hosszú befogó van a háromszögben. Határozzuk meg a másik befogó hosszát.

7. Valamely szótlan derékszögű háromszög egyik szöge $14^\circ 27'$, e szög mellett 26,2 cm hosszú befogó található. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalainak a hosszát.

8. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 17,3 dm hosszú, ezen befogóval szemben $43^\circ 18'$ -es szög található a háromszögben. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalainak a hosszát.

9. Adott egy derékszögű háromszög 35,2 cm-es befogója és a mellette levő $67^\circ 24'$ -es szöge. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen oldalainak a hosszát.

10. Adott egy beszédes derékszögű háromszög $72^\circ 15'$ -es szöge és a vele szemközt 58,7 m hosszú oldal. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalainak a hosszát.

11. Egy derékszögű háromszög átfogója 24 cm, míg egyik befogója 12 cm hosszú. Határozzuk meg az adott befogóval szemközti szöget.

12. Valamely derékszögű háromszögben ismert az 5 cm-es befogó és a 15 cm-es átfogó. Számítsuk ki az 5 cm-es befogóval szemközti szöget.

13. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögét keressük, ha ismert, hogy a szög melletti két oldal hosszúsága 13,6 cm illetve 32,7 cm.

14. Egy derékszögű háromszög átfogója 27,2 cm és az egyik befogója 9,6 cm. Határozzuk meg az ismert befogóval szemközti szöget.

15. Ismert egy derékszögű háromszög két befogójának a hossza, az egyik 3 egység, a másik $\sqrt{3}$ egység. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen szögeit.

16. Egy háromszög két befogója 6 cm és 24 cm. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen oldalával szemközti szögét.

17. Valamely derékszögű háromszög egyik befogója egységnyi, míg a másik befogó $\sqrt{3}$ egység hosszú. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen szögeit.

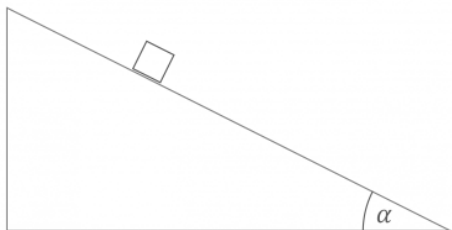
18. Egy pincébe vezető lejárát mélysége 132 cm, míg a lejárát vízszintesre való merőleges vetülete 244 cm. Mekkora a lejárát hajlásszöge a vízszinteshez képest?

19. Egy 400 m hosszú egyenes útszakasz emelkedése 10 m. Mekkora az emelkedés szöge?

20. Egy lejtő a vízszintessel 18° -os szöget zár be, a vízszintesre eső merőleges vetülete 4,6 m. Milyen magasról érkezik a lejtő?



21. Egy lejtő a vízszintessel 24° -os szöget zár be és 1,8 m magasra visz. Mekkora a lejtő hossza és a vízszintesre eső vetülete?



22. Egy létrát támasztunk a falhoz. A létra hossza 3,2 m és a létra lábai a faltól 75 cm-re vannak. Mekkora szöget zár be a fallal a létra?

23. Egy torony teteje a talpától 60 m távolságból $22^\circ 37'$ -es szög alatt látszik. Milyen magas a torony?

24. Milyen magasra visz a 8,7 m hosszú lejtő, ha az a vízszintessel 15° -os szöget zár be?

25. Lejtős feljárót kell készíteni, amelynek 1,5 m magasra kell vezetnie. A vízszintes talajon milyen távol kezdődjön a feljáró, ha a hajlásszöge 12° -os lesz?

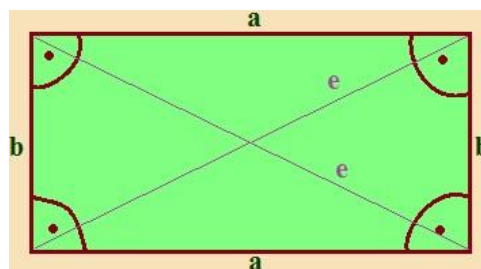
26. Egy ház teraszára vezető lépcsősor vízszintesre eső merőleges vetülete 230 cm. Egy lépcső magassága 14 cm és a teraszra 8 lépcső vezet. Mekkora a lépcsősor hajlásszöge a vízszinteshez képest?

27. Egy hegyre az út átlagosan $5^\circ 42'$ -es szög alatt emelkedik. Hány százalékos az emelkedő?



28. Egy hegyi út emelkedése 12%. Mekkora szöggel hajlik az út a vízszinteshez képest?

29. Egy utca közepe fölött egy lámpát függesztettek fel. A két felfüggesztési pont távolsága 15 m az utca két oldalán. A lámpa a huzal felezőpontjában lóg, belógása 20 cm. Mekkora szöget zár be a huzal a vízszintessel?



30. Egy téglalap egyik oldala 6,8 cm. Az átlói a megadott oldallal $32^\circ 20'$ -es szöget zárnak be. Határozzuk meg a téglalap ismeretlen oldalának a hosszát.

31. Egy téglalap átlója 14,3 cm-es és az egyik oldallal $23^{\circ}18'$ -es szöget zár be. Mekkora a téglalap oldalai?

32. Egy templomtorony árnyéka 42,5 m hosszú. A Nap sugarai a talajhoz képest $38,6^{\circ}$ -os beesési szögben érkeznek. Milyen magas a templomtorony?



33. Mekkora szöget zárnak be a Nap sugarai a talajjal, ha valamely függőleges rúd árnyéka az adott pillanatban 2,8-szor akkora, mint a rúd hossza?

34. Mekkora a Nap sugarainak a beesési szöge a talajhoz képest, ha valamely karó árnyéka az adott pillanatban 2,4-szer akkora, mint a karó hossza?

35. Milyen távolságra vagyunk a 12 m magas épülettől, ha $27^{\circ}14'$ szög alatt látjuk, s a szemünk az épület talppontjával egy vízszintes síkban fekszik?

36. Egy 80 m hosszú lejtős út felső végén levő emlékoszlopot $3,7^{\circ}$ szögben látjuk az út elejéről. A lejtő hajlásszöge $21^{\circ}18'$. Milyen magas az emlékoszlop?

37. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög $36^{\circ}52'$, a szöget felező egyenes hossza 25 cm. Mekkora a háromszög befogói?

38. Egy hegy csúcsán áll egy 15 m magas kilátó, amelynek a talppontját és csúcsát a mellette levő völgyből $29^{\circ}10'$ és $32^{\circ}8'$ emelkedési szög alatt látjuk. Milyen magas van a hegy csúcsa a megfigyelő szintjétől számítva?

39. Határozzuk meg annak az épületnek a magasságát, amely a tőle 150 m távolságban felállított 1,5 m magas teodolittal mérve $7,8^{\circ}$ -os emelkedési szög alatt látszik!

40. Mekkora szög alatt látja a megfigyelő – akinek a szeme 1,6 m magasan van a föld fölött – a 45 m távolságban levő 65 m magas tornyot?

41. Egy 10 m magas torony tetején levő csillag a toronytól 25 m távolságból $1^{\circ}10'$ szög alatt látszik. Milyen magas a csillag?

42. Egy épülettől 25 m távolságból az épület egyik ablakának felső párkánya $40^{\circ}2'$, alsó párkánya pedig $38^{\circ}22'$ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az ablak?

43. Hegy tetején levő emlékoszlop a völgyből $1^{\circ}5'$ szög alatt látszik, a hegy pedig $18^{\circ}40'$ szög alatt. A hegy 380 m magas. Milyen magas az emlékoszlop?

44. Egy hegyre az északi és a déli oldaláról két ösvény vezet fel, amelyek azonos szintről, egymástól légvonalban 8 km távolságban indulnak. Milyen magas a hegy, ha a két ösvény emelkedési szöge $18^{\circ}24'$, illetve $22^{\circ}43'$?

45. Egy domb tetején 20 m magas kilátótorony van. Egy völgy egy pontjából a kilátótorony alja $47,5^{\circ}$, a teteje $50,2^{\circ}$ emelkedési szögben látszik. Mekkora utat tesz meg az a varjú, amelyik a völgy ezen pontjából a kilátótorony tetejére egy egyenes mentén repül?

46. A tőlünk keletre levő hegy csúcsát $21^{\circ}32'$ emelkedési szög alatt látjuk. Ha a vízszintes talajon 1,2 km-t délre gyalogolunk, akkor innen a csúcs $19^{\circ}42'$ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?
47. Egy paralelogramma két oldala 14 és 16 egység hosszúak, az általuk bezárt szög 110° . Számítsuk ki a paralelogramma területét!
48. Egy rombusz oldalai 10 egység hosszúak, és az egyik szöge 100° . Számítsuk ki a rombusz területét!
49. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az ezzel szemben levő szög
a) 22° , b) 41° , c) 63° , d) 70° , e) 83° . Mekkora a másik befogó és az átfogó?
50. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 6 cm, a másik
a) 1 cm, b) 3 cm, c) 6 cm, d) 7 cm, e) 12 cm. Mekkora a háromszög szögei?
51. Határozd meg annak a derékszögű trapéznek a szögeit, hiányzó oldalát és területét, amelynek alapjai 2 cm és 8 cm, az erre merőleges szárak pedig 4 cm.
52. Egy szimmetrikus trapéz átlói derékszöget zárnak be egymással. Mekkora a trapéz szárai és szögei, ha két alapja $3\sqrt{2}$ illetve $4\sqrt{2}$ hosszúságú?
53. Egy, a vadnyugati hegyek között futó vasúton postavonat érkezését várják Pizkoskező Jack bandái. Az őrszem a hegy tetején figyel, s azt az utasítást kapja, hogy amint a vonat 100 méteren belülre ér, jelezzen a hegy lábánál álló tásainak, akik akadályt gurítanak a vonat útjába. Jelezhet-e az őrségben álló bandita rablótársainak, ha a vonat elejét 35° -os, a végét 30° -os lehajlási szögben látja? (A lehajlási szög a vízszintestől lefelé mért szög.)
54. Egy 45 méter magas kilátó tetejéről egy forrást 27° -os lehajlási szögben látunk. Távcsővünket 112° -kal vízszintesen elfordítva egy erdészházat 34° -os lehajlási szögben látunk. Milyen távol van az erdészház a forrástól?
55. Egy 15 méter széles folyómederben a víz szintje 3 méterrel van a part alatt. A folyón híd vezet át, amelyet a hajók érkezésekor középen szétválasztva felnyitnak. A hidat a vízszinteshez képest 31° -ban lehet felnyitni. a) Milyen távolra kerül egymástól a híd közepének két pontja? b) Milyen magasra kerül a híd közepe a víz szintjéhez viszonyítva? c) Egy 6 méter széles és 5,5 méter magas hajó érkezik. Átfér-e a felnyitott híd alatt?
56. Egy 12 cm alappal rendelkező szimmetrikus trapézba 10 cm sugarú beírt kört rajzolunk. Mekkora a trapéz szögei és oldalai?
57. Egy paralelogramma kerülete 30 cm, két magassága 4 és 6 cm. Mekkora az oldalai és szögei?
58. Egy 2 m hosszú kétlábú létrát annyira kinyitunk, hogy a lábak 40° -os szöget zárnak be egymással. Fel tud-e állni a legtetejére egy 180 cm magas ember egy 3,6 méter belmagasságú szobában?
59. Egy 80 cm hosszú kötélen függő golyót 20° -os szögben kitérítünk a függőlegeshez képest. a) Milyen távol van az ingamozgást végző test két szélső helyzete? b) Mennyivel van magasabban a golyó a kitérített helyzetben, mint az eredetiben?
60. Két csiga között az út harmadánál egy 12 cm magas fűszál áll. Az egyik csiga a fűszálát $21,8^{\circ}$ -os szögben látja. a) Milyen messze van a két csiga? b) Mekkora szögben látja a másik csiga a fűszálát?

61. Egy 5 cm sugarú körhöz adott külső pontból húzott érintők 58° -os szöget zárnak be egymással. Mekkora az érintőszakaszok? b) Milyen hosszú az érintési pontokat összekötő húr?
62. Egy 400 méter hosszú emelkedő út végén egy 25 méter magas épület áll. Az út $14,7^\circ$ -os szöget zár be a vízszintessel. a) Milyen magasra visz az út? b) Mekkora szögben látszik az épület az út elejétől?
63. Egy 204 m magas dombra 704 m hosszú egyenes út vezet. A domb tetején álló kilátó a domb aljáról $1,2^\circ$ -os szögben látszik. a) Milyen meredek a domb? b) Milyen magas a kilátó?

Összefüggések a szögfüggvények között

64. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) \quad \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cos \alpha \quad \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

65. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőségek azonosságok!

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

66. Hozzuk egyszerűbb alakra azt felhasználva, hogy egy szög sinusa a pótszögének a cosinusa és egy szög cosinusa a pótszögének a sinusa!

$$\sin 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \quad \sin 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \sin 50^\circ \quad \sin 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \sin 50^\circ + \cos^2 50^\circ$$

$$\cos^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 20^\circ \quad \sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$$

67. a) A négy szögfüggvény közül az egyik ismeretében számítsuk ki a hiányzó hármat!

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \cos \alpha = 0,2 \quad \operatorname{tg} \alpha = 4 \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$$

- b) A négy szögfüggvény közül számítsuk ki a hiányzó hármat!

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \quad \cos \alpha = \frac{3}{4} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{9} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{3}$$

68. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha \quad \frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

69. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$$a) \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad b) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha} \quad c) (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) \quad d) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei

70. Számológép nélkül számítsuk ki a nevezetes szögek szögfüggvény értékeinek felhasználásával.

$$3 \sin 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ \quad \sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \quad \frac{\cos 30^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 45^\circ}$$

$$\sin^2 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos^2 60^\circ$$

$$\sin^2 30^\circ - 2 \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$$

71. Számológép nélkül számítsuk ki a nevezetes szögek szögfüggvény értékeinek felhasználásával.

$$2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ \quad 3\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ + 2\cos 60^\circ$$

$$(\operatorname{tg} 45^\circ)^2 - (\sin 30^\circ)^2 - (\cos 60^\circ)^2 \quad (\cos 30^\circ)^2 - (\sin 45^\circ)^2 \quad \frac{2 - \operatorname{tg} 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}$$

72. Számológép nélkül számítsuk ki a nevezetes szögek szögfüggvény értékeinek felhasználásával.

$$a) \sin 30^\circ + \cos 60^\circ \quad b) 2\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ \quad c) \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\sin 60^\circ} \quad d) \sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ$$

$$e) \frac{\cos^2 30^\circ - \operatorname{tg}^2 45^\circ}{\operatorname{tg}^2 45^\circ \cdot \cos 60^\circ} \quad f) \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4}}$$

Az általános definíció alkalmazása

73. Határozzuk meg a következő szorzatok előjelét!

$$\sin 100^\circ \cdot \sin 132^\circ \quad \cos 285^\circ \cdot \cos(-316)^\circ \quad \cos 210^\circ \cdot \sin 115^\circ \quad \sin 3 \cdot \cos 4$$

74. A definíció alapján, számológép nélkül határozzuk meg a következő szögek sinusát és cosinusát!
120°, 135°, 225°, 240°, 270°, 315°

75. A definíció alapján, számológép nélkül számítsuk ki!

$$2\cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ + 4\cos 180^\circ \quad 5\sin 270^\circ - 2\cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ$$

$$\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ \quad \sin 135^\circ \cdot \cos 225^\circ \cdot \sin 300^\circ \cdot \cos 120^\circ$$

$$\sin 180^\circ \cdot \sin 270^\circ + \sin 90^\circ \cdot \cos 360^\circ$$

76. A definíció alapján, számológép nélkül számítsuk ki!

$$2\cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ + 4\cos 180^\circ \quad 5\sin 270^\circ - 2\cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ$$

$$\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ \quad \sin 135^\circ \cdot \cos 225^\circ \cdot \sin 300^\circ \cdot \cos 120^\circ$$

$$\sin 180^\circ \cdot \sin 270^\circ + \sin 90^\circ \cdot \cos 360^\circ$$

77. A definíció alapján, számológép nélkül számítsuk ki! $\cos \frac{5\pi}{3}$ $\sin \frac{5\pi}{4}$

$$\sin \frac{5\pi}{6} \quad \cos \frac{7\pi}{2} \quad \sin \frac{7\pi}{6} \quad \sin \frac{8\pi}{3} \quad \cos \frac{9\pi}{4} \quad \sin \frac{11\pi}{6}$$

78. A definíció alapján, számológép nélkül számítsuk ki! $\sin 7\pi$ $\cos 8\pi$ $\sin 2009\pi$ $\cos 2002\pi$

79. Írjuk fel 0° és 90° közötti szögek szögfüggvényével: $\sin 118^\circ$, $\sin 307^\circ$, $\sin 280^\circ$, $\sin 320^\circ$
 $\cos 193^\circ$, $\cos 280^\circ$, $\cos 320^\circ$, $\cos 225^\circ$ $\operatorname{tg} 150^\circ$, $\sin(-200^\circ)$, $\cos(-27^\circ)$, $\operatorname{ctg} 150^\circ$

80. Határozzuk meg 120°, 150°, 210° sinusát és cosinusát számológép és táblázat nélkül.

81. Határozzuk meg 225°, 300°, 330° sinusát és cosinusát számológép és táblázat nélkül.

82. Vezessük vissza megfelelő hegyesszög szögfüggvényeire:

a) $\sin 225^\circ$, $\sin 1395^\circ$, $\sin 151^\circ$, $\sin 301^\circ$

b) $\cos 150^\circ$, $\cos 299^\circ$, $\cos 400^\circ$, $\cos 700^\circ$

c) $\operatorname{tg} 521^\circ$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{10}$

d) $\sin 269^\circ$, $\sin 1755^\circ$, $\sin 10$ (nem $\sin 10^\circ$), $\sin\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$

e) $\cos 111^\circ$, $\cos(-494^\circ)$, $\cos 8,8$ (nem $\cos 8,8^\circ$), $\cos 1625^\circ$

f) $\operatorname{tg} 521^\circ$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg}(-888^\circ)$, $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{10}$

Trigonometrikus egyenletek

83. Oldjuk meg az egyenleteket:

$$\sin x = 0,2025 \quad \sin x = -0,2025 \quad \cos x = -\frac{1}{2} \quad 2\cos x = 0,1848$$

$$3\sin x = -2,2 \quad 3\sin x + 5\sin x = 4 \quad -\cos x - 9\cos x = 8$$

84. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$\sin(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \quad \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

85. Oldjuk meg az egyenleteket! $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0,5 \quad \sin 2x = 1$

86. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0 \quad \cos^2 x - \cos x = 0 \quad \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

87. Oldjuk meg az egyenleteket! $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \quad \cos 2x = \frac{1}{2} \quad \cos(2x + 60^\circ) = \frac{1}{2}$

88. Oldjuk meg az egyenletet! $4\cos^2 x = 1 \quad \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad 6\cos^2 x + 11\sin x - 10 = 0$

89. Oldjuk meg az egyenletet! $\sin x \cdot \operatorname{ctgx} = 0 \quad \sin x \cdot \operatorname{tgx} \cdot \operatorname{ctgx} = 0 \quad 3\operatorname{ctgx} = 2\cos x$

90. Oldjuk meg az egyenletet! $1 + \operatorname{tg}^2 x = \cos^2 x$

91. Oldjuk meg az egyenleteket! $\sin x = -0,6600 \quad \sin x = 0,9930 \quad 7\sin x = 3 \quad 2\sin x = 1$

92. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$2\sin x = -1 \quad 2\sin x = -\sqrt{2} \quad \cos x = 0,5 \quad 2\cos x = \sqrt{2}$$

93. Oldjuk meg az egyenletet! $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

94. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$4\sin^2 x + 2\sin x - 0 = 0 \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \quad 2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

95. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$2\sin x = \operatorname{tg} x$$

$$3\sin x = 2\operatorname{tg} x$$

$$\sin x = \cos x$$

$$\sin x = 2\cos x$$

96. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$4\cos^2 x = \sin^2 x$$

97. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$\cos x = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} = 2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$$

98. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$\cos(2x - 18^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}\cos 3x = 1$$

$$2\cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

99. Oldjuk meg az egyenleteket! $\operatorname{tg} x^2 = 1$

$$4\cos^2 x + 17\sin x = 8$$

100. Oldjuk meg! $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$

101. Oldjuk meg az egyenleteket!

$$\text{a) } \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \cos(\cos x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \sin \pi x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d) } 2^{\sin^2 x} = \sin x$$

$$\text{e) } 2\cos x \cdot \cos 2x = \cos x$$

$$\text{f) } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$$

102. Bizonyítsuk be, hogy ha $\cos \neq 0$, akkor $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

103. Igazoljuk, hogy $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x$ minden olyan x -re teljesül, amelyre $\operatorname{tg} x$ értelmezve van.

104. Oldjuk meg az egyenletet: $\sin x + \cos x = 1$

Trigonometrikus függvények

105. Ábrázoljuk a függvényt! $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

107. Ábrázoljuk a függvényeket!

$$f(x) = -\sin x$$

106. Ábrázoljuk a függvényt! $f(x) = 2\sin x$

$$f(x) = -\operatorname{tg} x$$

$$f(x) = \sin(x + \pi)$$

108. Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét!

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$$

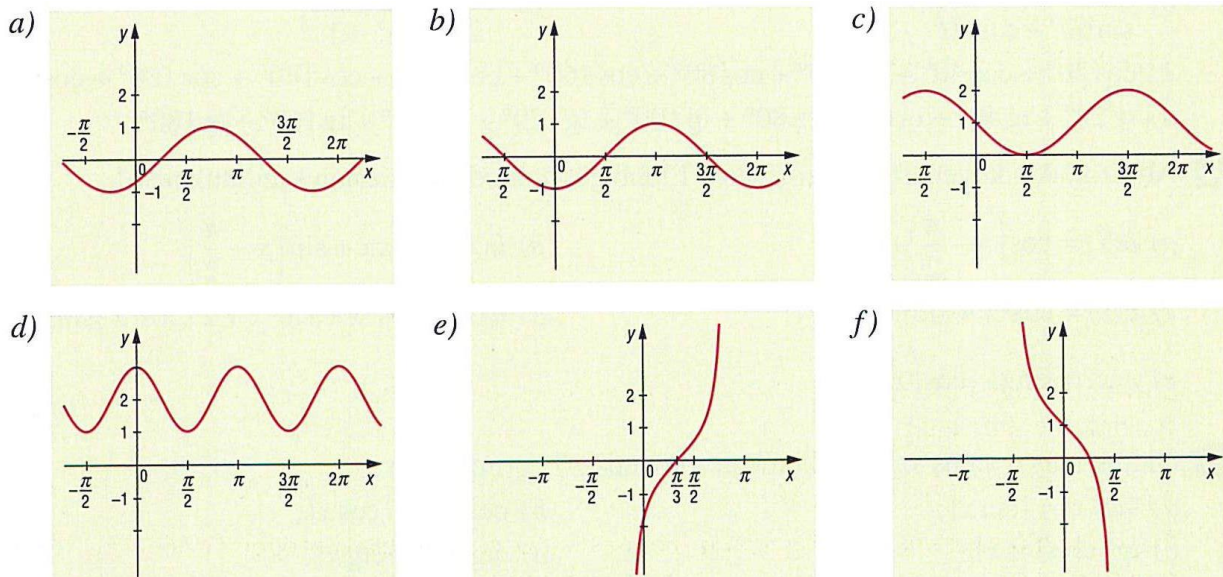
109. Ábrázoljuk a következő függvényeket! $y = |\operatorname{tg} x|$ $y = |\cos x|$ $y = \sin|x|$ $y = [\sin x]$

110. Ábrázoljuk és jellemezzük a függvényt! $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

111.a) Ábrázoljuk a következő függvényeket!

$$y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \quad y = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \quad y = -\frac{1}{2} \cos x - 3 \quad y = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right|$$

112. Írjuk fel a trigonometrikus függvények hozzárendelési szabályát!



113. Ábrázoljuk a függvényeket!

$$f(x) = \sin x \quad f(x) = 3 \sin x \quad f(x) = \frac{1}{2} \sin x \quad f(x) = -\cos x \quad f(x) = -\cos x + 2 \quad f(x) = -3 \cos x$$

114. Ábrázoljuk a függvényeket!

$$f(x) = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \quad f(x) = \sin(x + 45^\circ) \quad f(x) = \cos(x - \pi) - 1$$

115. Ábrázoljuk a függvényeket!

$$f(x) = -3 \sin x + 4 \quad f(x) = -\frac{1}{2} \cos x - 3$$

119. Páros vagy páratlan függvény? $f(x) = \lfloor x \rfloor$,

$$f(x) = -\{x\}$$

116. Oldjuk meg grafikusan az egyenleteket!

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

120. Alkossunk 3-3 páros és páratlan függvényt.

121. Alkoss valamelyik trigonometrikus függvényből és az egészrész, törtrész vagy a signumfüggvényből összetett függvényeket. Szerepelhet benne abszolút érték is.

117. Oldjuk meg grafikusan! $\sin x = \cos x$

122. Ábrázoljuk: $f(x) = \sin|x|$

118. Ábrázolás és függvényvizsgálat:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin x - 3$$

123. Ábrázoljuk: $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$

124. Ábrázoljuk a szinuszfüggvényt a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ intervallumon.

125. Az állítások közül melyik teljesül az $f(x) = \sin x$ függvényre a megadott intervallumokon?

$$[0, \pi] \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad [1; 3]$$

- | | | |
|---------------------|----------------------|-------------------------------|
| 1. Van zérushelye | 2. Szigorúan monoton | 3. Szigorúan monoton csökkenő |
| 4. Van szélsőértéke | 5. Van maximuma | 6. Van minimuma |

126.* Igazoljuk, hogy a $\sin x = ax + b$ egyenletnek mindig van megoldása, ha $a \neq 0$.

127. Az állítások közül melyik teljesül az $f(x) = \cos x$ függvényre a megadott intervallumokon?

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right] \quad \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad [-0,5; 0,5]$$

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|---------------------|
| 1. Van zérushelye | 2. Pontosán két zérushelye van | 3. Van szélsőértéke |
| 4. Minimuma és maximuma is van | 5. Szigorúan monoton növekedő | 6. Monoton csökkenő |

Nehezebb feladatok

128. Legyen α egy tetszőleges hegyesszög. Határozzuk meg $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ kifejezés maximumát.

129. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1 \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

130. Egy háromszög két súlyvonalának hossza 12 cm és 9 cm, hajlásszögük 75° . Mekkora a háromszög területe?

131. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala a , a vele szemben levő szög α . Mekkora az a oldal végpontjaiból induló magasságok talppontjainak távolsága?

132. Egy húrtrapézba 12 cm sugarú kör írható, a trapéz szárakhoz tartozó középvonala 26 cm hosszú. Mekkora a trapéz szögei?

133. A síkság egy pontjából két egymás mögött levő hegycsúcs egy irányban látszik, a közelebbi 26° , a távolabbi 32° emelkedési szög alatt. Ha 200 méterrel közelebb haladunk a hegycsúcsok felé, a két csúcs közös 42° emelkedési szögben látszik. Milyen magasan vannak a hegycsúcsok a síkság felett?

134. Egy várba vezető sikló 150 m magasra visz. Az indulási pontból a vár 14° emelkedési szögben látszik, a pálya kezdő emelkedési szöge 11° , majd a pálya megtörik, és innen az emelkedési szög 20° . Hány méter utat tesz meg a sikló, amíg felér a várba?

135. Egy repülőgép repülési magassága 8000 méter, sebessége 700 km/ó. Mennyi ideig tartózkodik egy szemlélő számára a látóhatár felett, ha északról érkezik és délre tart? A Földet tekintsük 6378 km sugarú gömbnek.)

136. Adjuk meg a kifejezések pontos értékét:

$$\left(\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha\right)^2 - \left(\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha\right)^2 \quad \frac{3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 3}{\operatorname{ctg} \alpha} = 1$$

137. Egy 12° -os lejtőn álló egyenes fára úgy süt a nap, hogy a fa árnyéka a lejtő irányában lefelé 5 m. Milyen magas a fa, ha ugyanakkor egy vízszintes talajon álló egyenes cölöp árnyéka a cölöp magasságának 32 százaléka?

138. Egy hegy magasságának meghatározásához egy távolabb folyó patak egyenes partján az A, a B és a C pontokat úgy vesszük fel, hogy $AB = BC = 700$ m legyen. A három pontból a hegy magassága 40° , 50° és 60° szögben látszik. Milyen magas a hegy?

139. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket: $\sin x \geq 0$ $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -1$

$$\cos 2x \leq \frac{1}{2} \quad 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2} \quad \sin 2x < -\frac{1}{2} \quad \cos 2x \leq 1$$

140. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 + \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

VII. GEOMETRIA (második rész)

1. Az ABC háromszög BC oldalának meghosszabbításán levő D pontra az $\angle ABC \leq \angle CAD < \angle A$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy AD mértani közepe CD-nek és BD-nek.

2. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót harmadolja. A háromszög legkisebb oldala 4 cm. Mekkora a többi oldal?

3. Egy körhöz egy külső P pontból húzott szelő a kört A-ban és B-ben metszi. PA 5 cm-rel rövidebb, AB pedig 5 cm-re hosszabb, mint a P-ből a körhöz húzott érintőszakasz. Mekkora ez az érintő?

4. A P pontból egy körhöz 4 cm-es érintőszakasz húzható. P a kör középpontjától 6 cm-re van, s a P-ből a körhöz olyan szelőt húzunk, amelynek hosszabbik szelete 8 cm. Mekkora távolságra van a kör középpontja ettől a szelőtől?

5. Az ABC háromszögben meghúztuk az AA_1 és a BB_1 súlyvonalakat. Jelöljük a háromszög súlypontját S-sel. Határozzuk meg az ABS és az SA_1B_1 háromszögek területének arányát.

6. Egy háromszög oldalain megjelöljük a harmadoló pontokat és a csúcshoz közelebbi harmadoló pontokat összekötjük mindhárom csúcs esetében. Az így keletkezett hatszög területe hány százaléka a háromszög területének?

7. Számítsuk ki annak a derékszögű háromszögnek az oldalait, amelynek átfogója 4, az átfogóhoz tartozó magassága $\sqrt{3}$. Mekkora a háromszög szögei?

8. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 8 egység, a másik befogónak az átfogóra eső vetülete 12 egység. Számítsuk ki a háromszög hiányzó oldalait és az átfogóhoz tartozó magasságot.

9. Egy derékszögű háromszög befogói 12, illetve 16 cm. Mekkora részekre osztja az átfogót a hozzá tartozó magasság?

- 10.** Húzzunk egy körhöz egy külső pontból két szelőt. Az egyiken 3 cm, a másikon 4 cm a rövidebb szelőszakasz. Ez utóbbin a szelőn a húr 5 cm. a) Milyen hosszú az előbbi szelőn a húr? b) Mekkora érintőszakasz húzható ugyanebből a pontból a körhöz?
- 11.** Egy körhöz egy külső pontból húzzunk egy szelőt és egy érintőt. Az érintőszakasz hossza 12, a kisebbik szelőszakasz 6. Mekkora a kör sugara, ha a szelőnek a kör középpontjától vett távolsága 12?
- 12.** Egy 10 cm sugarú körhöz a középponttól 26 cm-re levő P pontból két szelőt húzzunk. Az egyik szelő átmegy a kör középpontján, a másik szelőnek a körbe eső húrja 14 cm. a) Mekkora ez utóbbi szelő rövidebb szelőszakasza? b) Milyen hosszú érintő húzható a körhöz a P pontból?
- 13.** A termünkben a tábla és a faliújság hasonló (mindketten téglalap alakúak). A faliújság átlós mérete 1 m, a tábla rövidebb oldala 1 m, a hosszabbik 2 m. Hányszorosa a tábla területe a faliújságénak?
- 14.** Egy egyenlő szárú háromszög szárai 40 cm hosszúak. A száron mérve a csúcstól milyen távolságra húzzunk az alappal párhuzamos egyenest, ha a háromszöget két egyenlő területű részre akarjuk szétvágni?
- 15.** Egy trapéz alapjai 15 cm és 25 cm. Határozzuk meg a trapéz területét, ha a kiegészítő háromszög területe 60 cm^2 .
- 16.** Két kör sugarának különbsége 6 cm, azonos középponti szöghöz tartozó körcikkeik területeinek aránya 4:9. Mekkora a sugarak?
- 17.** Egy háromszög oldalainak hossza $a=7 \text{ cm}$, $b=6 \text{ cm}$, $c=5,5 \text{ cm}$. Határozzuk meg, hogy a c oldalhoz tartozó szögfelező mekkora részekre osztja a c oldalt.
- 18.** Egy háromszög oldalainak hossza a, b, c. Határozzuk meg, hogy a c oldalhoz tartozó szögfelező mekkora részekre osztja a c oldalt.
- 19.** Az ABC háromszögben a C csúchoz tartozó szögfelezőnek a szemközti oldallal alkotott metszéspontján át rajzoljunk a b oldallal párhuzamos egyenest. Fejezzük ki ennek a párhuzamosnak a háromszög belsejébe eső részének a hosszát a háromszög a és b oldalaival.
- 20.** Határozzuk meg, hogy mekkora részekre osztja az egység befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóját a szemközti szög szögfelezője.
- 21.** Egy P pontból egy körhöz húzott szelőn a rövidebb szelőszakasz 16, a húr 9. Mekkora a P pontból a körhöz húzott érintőszakasz?
- 22.** Egy P pontból egy körhöz húzott szelőn a hosszabb szelőszakasz 16, az érintőszakasz 12. Mekkora a szelőszakaszon a húr hosszúsága?
- 23.** Egy P pontból egy körhöz húzott szelőn a rövidebb szelőszakasz 16, a húr 10. A P pontból egy másik szelőt is húzzunk, itt a rövidebb szelőszakasz 9. Mekkora ez utóbbin a húr hosszúsága?
- 24.** Fogalmazzuk meg a magasságtétel megfordítását. Igaz-e?
- 25.** A P pontból a körhöz húzott érintő 20 cm, egy P-n átmenő szelő a kör középpontjától 8 cm távolságban halad. E szelőnek a hosszabbik szelete 40 cm. Mekkora a kör sugara?

- 26.** Osszuk egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre, és a szomszédos oldalak legközelebbi osztópontjait kössük össze egyenessel. Igazoljuk, hogy ez a négy egyenes paralelogrammát határoz meg.
- 27.** Egy 300 cm^2 területű háromszöget $\lambda = 2, 10, 0,5, 0,4$ arányban nagyítottunk, illetve kicsinyítettünk. Hogyan változott a területe? Számítsuk ki az új háromszög területét.
- 28.** Egy 300 cm^3 térfogatú kockát $\lambda = 2, 10, 0,5, 0,4$ arányban nagyítottunk, illetve kicsinyítettünk. Hogyan változott a térfogata? Számítsuk ki az új kocka térfogatát. (Ez négy feladat.)
- 29.** Számítsuk ki a hasonlóság arányát, ha két hasonló háromszög területe
a) 4 cm^2 és 8 cm^2 b) 4 cm^2 és 12 cm^2 c) 20 cm^2 és 8 cm^2
- 30.** Egy háromszög oldalait három egyenlő részre osztottuk és a szomszédos oldalaknak a közös csúcshoz legközelebbi osztópontjait összeköttöttük. a) Hogyan aránylik a háromszög csúcsainál levő kis háromszögek területe az eredeti háromszög területéhez? b) Hogyan aránylik a kis háromszögek levágásával kapott hatszög területe az eredeti háromszög területéhez?
- 31.** Egy háromszög oldalait öt egyenlő részre osztottuk és a szomszédos oldalaknak a közös csúcshoz legközelebbi osztópontjait összeköttöttük. a) Hogyan aránylik a háromszög csúcsainál levő kis háromszögek területe az eredeti háromszög területéhez? b) Hogyan aránylik a kis háromszögek levágásával kapott hatszög területe az eredeti háromszög területéhez?
- 32.** Az ABC háromszög AB oldalához tartozó magasság 48 cm . A magasságot három egyenlő részre osztjuk, és az osztáspontokon át az AB oldallal párhuzamos szakaszokat húzunk. Így egy háromszöget és két trapézt kapunk. a) Hányad része ezek területe az ABC háromszög területének? b) Mekkora a részek területének egymáshoz viszonyított aránya?
- 33.** Az ABC háromszög AB oldalához tartozó magasság 48 cm . A háromszöget az AB oldallal párhuzamos egyenesekkel három egyenlő területű részre bontjuk. Milyen távolságban haladnak ezek a párhuzamosok a C csúcstól?
- 34.** Egy derékszögű háromszög két befogója 5 és 12 cm . Az átfogóhoz tartozó magasság a háromszöget két háromszögre bontja. Mennyi ezen két háromszög területének aránya?
- 35.** Az ABC háromszög AB oldalához tartozó magasság 48 cm . A háromszöget az AB oldallal párhuzamos egyenesekkel öt egyenlő területű részre bontjuk. Milyen távolságban haladnak ezek a párhuzamosok a C csúcstól?
- 36.** Két kör sugarának különbsége 6 cm , azonos középponti szöghöz tartozó körcikkeik területeinek aránya $4:9$. Mekkora a sugarak?
- 37.** Egy kör belsejében levő P ponton át húzzunk két tetszőleges szelőt. Lássuk be, hogy a két szelőn a P-től a körvonalig terjedő szakaszok szorzata ugyanaz.
- 38.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 56 cm , szárai 53 cm hosszúságúak. Tudjuk, hogy a beírt körének és a köré írt körének a középpontja, a súlypontja, magasságpontja az alaphoz tartozó magasságán van. Számítsuk ki, hogy milyen távol van az alap egyenesétől
a) a beírt kör középpontja,
b) a köré írt kör középpontja,
c) a súlypontja,
d) a magasságpontja.

39. Egy egyenesen vegyünk fel négy pontot: A, A', B, B'. Szerkesszük meg annak a középpontos hasonlóságnak a középpontját, amely az A pontot A'-be, a B pontot B'-be viszi.
40. Egy gúla magasságát öt egyenlő hosszúságú szakaszra bontjuk. Az osztópontokra illeszkedő és az alappal párhuzamos síkokkal a gúlát részekre vágjuk. a) Határozzuk meg a síkmetszetek területének arányát. b) Határozzuk meg a részek térfogatának arányát.
42. Egy háromszög két oldala 12 és 9 cm. E két oldal által közbezárt szög szögfelezője két részre osztja a harmadik, 14 cm-es oldalt. Mekkora ezek a szakaszok?
43. Egy derékszögű háromszög átfogója 12 m, az átfogóhoz tartozó magasságának talppontja 2,4 méterre van az átfogó egyik végpontjától. Mekkora a háromszög átfogójához tartozó magassága?
44. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága 3 cm, talppontja 1,5 cm-re van az egyik csúctól. Milyen hosszú a háromszög átfogója?
45. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm, a magasság talppontja 3:5 arányban osztja az átfogót. Határozzuk meg a háromszög hiányzó oldalainak nagyságát és az átfogóhoz tartozó magasságot?
46. Egy derékszögű háromszög átfogója 28 cm, az egyik befogó átfogóra eső merőleges vetülete 12,5 cm. Mekkora a háromszög ezen befogója?
47. Egy téglalap két oldala 40 cm és 32 cm. A területét 6,25-szorosára növeljük. Adjuk meg a hasonlóság arányát és az új téglalap területét.
48. A Föld átmérője 12 756 km. Hányszorosa a Föld felszíne a Plútó felszínének, ha a Plútó átmérője 3600 km?
49. Mennybefőttet kétféle kiszerelésben árulnak az egyik üzletben. Az egyik 13 cm magas, a másik 27 cm. Belefér-e a nagyobbba kilencszer annyi meggy, mint a kisebbbe?
50. Egy téglatest minden oldalát növeljük meg 45%-kal. Hányszorosára változik a téglatest felszíne és térfogata?
51. Egy háromszög oldalainak hossza 3, 5 és 6 egység. Mekkora részekre osztják a belső szögfelezők a szemközti oldalakat?
52. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szögfelezője a szemközti oldalt 3 cm és 4,5 cm-es részekre osztja. a) Mekkora a háromszög oldalai? b) Mekkora részekre osztja ez a szögfelező a háromszög alaphoz tartozó magasságát?
53. Mutassuk meg, hogy egy tompaszögű, egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szög szögfelezője nem harmadolhatja a szemközti oldalt.
54. Legyen az ABC háromszög C csúcsából induló külső szögfelezőjének és a szemközti oldal egyenesének metszéspontja a D pont. Bizonyítsuk be, hogy $BD:AD = a:b$ (A-val szemben a, B-vel szemben b oldal van.)
55. Egy egyenlő szárú háromszög szárai 40 egység hosszúak. A száron mérve az alaptól milyen távolságra húzzunk az alappal párhuzamos egyenest, ha a háromszöget két egyenlő területű részre akarjuk vágni?

- 56.** Egy trapéz alapjai 25 és 15 cm. Határozzuk meg a trapéz területét, ha a kiegészítő háromszög területe 60 cm^2 .
- 57.** Egy derékszögű deltoid (két szemközti szöge derékszög) szimmetriaátlója 26 egység, a másik átlója 10 egység. Mekkora a deltoid oldalai?
- 58.** Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű trapéz átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a rövidebb szár az alapok mértani közepe.
- 59.** Egy adott körhöz egy külső P pontból olyan szelőt húzunk, amelynek a körön kívüli szakasza 6 cm, a körön belüli húr pedig 18 cm hosszú. a) Milyen hosszú érintő húzható a körhöz a P pontból? b) Milyen messze van a P pont a körvonaltól, ha a kör sugara 16 cm?
- 60.** Húzzunk egy körhöz egy külső pontból két szelőt. Az egyik szelőn 3 cm, a másikon 4 cm a rövidebb szelőszakasz. Az utóbbin a húr 5 cm. a) Milyen hosszú az első szelőn a húr? b) Mekkora érintőszakasz húzható ugyanebből a külső pontból a körhöz?
- 61.** Egy körhöz egy külső pontból húzunk egy érintőt és egy szelőt. Az érintőszakasz hossza 12, a szelő kisebbik szelete 6. Mekkora a kör sugara, ha a szelőnek a kör középpontjától vett távolsága 12?
- 62.** Egy 10 cm sugarú körhöz a középpontjától 26 cm-re levő P pontból két szelőt húzunk. Az egyik átmegy a kör középpontján, a másik szelőnek a körbe eső húrja 14 cm. a) Mekkora ez utóbbi szelő rövidebb szelete? b) Milyen hosszú érintő húzható a körhöz a P pontból?
- 63.** Két, egymást kívülről érintő kör érintési pontján keresztül húzott szelő által kimetszett hurok aránya 13:5. Határozzuk meg a sugarak hosszát, ha a középpontok távolsága 36 cm.
- 64.** Az ABC háromszög AC és BC oldalát három-három egyenlő részre osztjuk, és a C csúcstól számítva, az egyik oldal második, a másik oldal első osztópontjából az AB oldalra x, ill. y merőleget bocsátjuk. Mutassuk meg, hogy $y = 2x$.
- 65.** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 3:2. Az átfogónak a hozzá tartozó magasságvonal által levágott szeletei közül az egyik 2 cm-rel nagyobb a másiknál. Határozzuk meg az átfogó hosszát.
- 66.** Egy derékszögű háromszög befogói úgy aránylanak egymáshoz, mint 3:7, az átfogóhoz tartozó magasságvonal hossza 42 cm. Határozzuk meg az átfogó szeleteinek hosszát.
- 67.** Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság az átfogót egy 4 és egy 12 cm-es darabra osztja. Mekkora a befogók és a magasság?
- 68.** Egy derékszögű háromszögben az egyik befogó 5 cm, ennek vetülete az átfogón 2 cm, mekkora az átfogó és a másik befogó?
- 69.** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogóhoz tartozó magasság 3 cm, mekkora az átfogó és a másik befogó?
- 70.** Szerkesszük meg két adott távolság mértani közepét.
- 71.** Adott két távolság összege és mértani középarányosa. Szerkesszük meg a távolságokat.
- 72.** Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszögben a befogók négyzeteinek aránya megegyezik a befogók átfogóra eső vetületeinek arányával.

- 73.** Igazoljuk, hogy a kör AB húrja az A-ból induló átmérő és erre az átmérőre eső vetületének mértani közepe.
- 74.** A h húr F felezőpontján átmenő átmérő két szakasza AF és BF. Igazoljuk, hogy a húrra rajzolt négyzet területe négyszer akkora, mint azé a téglalapé, melynek oldalai AF-fel és BF-fel egyenlők.
- 75.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szárai 13 cm hosszúságúak. Mekkora részekre osztja az alaphoz tartozó magasságot az alapon fekvő egyik szög szögfelezője?
- 76.** Egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóinak hossza 10 cm. Mekkora részekre osztja az egyik hegyesszög szögfelezője a szemközti befogót?
- 77.** Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AC=5$ cm, $BC=6$ cm, $AB=7$ cm. Az AB oldal F felezőpontján át párhuzamost húzunk a C csúcsból induló szögfelezővel, mely a BC oldalt D-ben, az AC oldal egyenesét E-ben metszi. a) Mekkora részekre osztja a C csúcsból induló szögfelező az AB oldalt? b) Számítsuk ki a BD, valamint az AE szakaszok hosszát.
- 78.** Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 3 cm, illetve 5 cm. Mekkora részekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót? Mekkora távolságra van a derékszögű csúcs az átfogótól?
- 79.** Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót két olyan szakaszra bontja, amelyek hossza 8 cm, illetve 24 cm. Mekkora a háromszög befogói?
- 80.** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 13 cm, amelynek átfogóra eső merőleges vetülete 12 cm. Számítsuk ki a háromszög hiányzó oldalait, valamint az átfogójához tartozó magasságát.
- 81.** Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság 2:5 arányban osztja két részre. A háromszög befogóira kifelé négyzeteket szerkesztünk. Határozzuk meg a két négyzet területének arányát.
- 82.** Adjunk szerkesztési eljárást négyzet szerkesztésére, amelynek területe megegyezik egy olyan téglalap területével, amelynek oldalai 3 cm, illetve 5 cm hosszúak.
- 83.** Az ABCD szimmetrikus trapéz alapjai: $AB=15$ cm, $CD=5$ cm. A trapéz AC átlója merőleges a trapéz BC szára. Számítsuk ki a trapéz területét.
- 84.** Milyen hosszú érintő húzható a körhöz abból a pontból, amelyen keresztül húzott szelő szakaszai úgy aránylanak egymáshoz, mint 1:4-hez, továbbá tudjuk, hogy az egyik szelőszakasz 12 cm-rel hosszabb, mint a másik?
- 85.** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 1:3. A befogók átfogóra eső merőleges vetületeire kifelé egy-egy négyzetet szerkesztünk. Határozzuk meg a két négyzet területének arányát.
- 86.** Két egybevágó derékszögű háromszög alakú kartonból deltoid alakú papírsárkányt készítünk úgy, hogy a háromszögeket átfogójuk mentén illesztjük egymáshoz. Az elkészült sárkányt átlói mentén egy-egy nádszállal megerősítjük. A felhasznált háromszög befogóinak aránya 5:12, átfogója 117 cm hosszúságú. a) Milyen hosszú nádszállak szükségesek a sárkány megerősítéséhez? b) A nádszállak milyen hosszúságú részekre bontják egymást? Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.
- 87.** Egy r sugarú, O középpontú körhöz húzunk két párhuzamos érintőt, majd behúzzuk a kör egy további érintőjét is, amelyből a két párhuzamos kimetszi a PQ szakaszt. a) Bizonyítsuk be, hogy a PQO háromszög derékszögű. b) Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakaszt tartalmazó érintő érintési pontja két olyan részre osztja a PQ szakaszt, amelyeknek mértani közepe r .

88. Az O középpontú, r sugarú körhöz húzzunk érintőt a középponttól c távolságra lévő P pontból; az érintési pontot jelölje E . Húzzuk meg továbbá a P és O pontokra illeszkedő szelőt; a körrel való metszéspontjait jelölje A , illetve B . a) Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével.
b) Fejezzük ki a szelőszakaszok hosszát c és r segítségével.
c) Alkalmazzuk a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételét. Milyen nevezetes geometriai tétel állítását olvashatjuk ki a felírt összefüggésből?

89. Az ABC hegyesszögű háromszög AB és AC oldalai fölé kifelé félköröket szerkesztünk. A háromszög AC oldalához tartozó magasságvonal talppontja Q , az AC oldalra rajzolt félkörrel való metszéspontja N . A háromszög AB oldalához tartozó magasságvonal talppontja P , az AB oldalra rajzolt félkörrel való metszéspontja pedig M .

- a) Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján.
- b) Bizonyítsuk be, hogy $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$.
- c) Bizonyítsuk be, hogy az A csúcs ugyanolyan távolságra van az M és N pontoktól.

90. Egy szabályos sokszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötjük, így egy újabb sokszöget kapunk. Számítsuk ki a beírt sokszög és a kiindulásul vett sokszög területének arányát, ha az oldalak száma a) 3; b) 4; c) 6.

91. Az $ABCD$ trapéz alapjainak hossza: $AB=18$ cm, $CD=12$ cm. A trapéz átlói az E pontban metszik egymást.

- a) Számítsuk ki az ABE és a CDE háromszögek területének arányát.
- b) Számítsuk ki az ABE és a CDE háromszögek területét, ha a trapéz területe 150 cm².
- c) Mekkora a BCE , valamint a DAE háromszögek területe?

92. András téglatest alakú akváriumának méretei 50 cm, 30 cm, 20 cm. Béla akváriuma hasonló András akváriumához, és 3,375-szer annyi víz tárolására alkalmas, mint Andrásé. Határozzuk meg Béla akváriumának méreteit.

93. Az ásványvizet műanyag palackokban, különböző kiszerelésben hozzák forgalomba. Egy cég üzletpolitikája szerint a különböző méretű palackoknak egymáshoz hasonlóknak kell lenniük. Hányszor olyan magas egy kétliteres palack, mint egy negyedliteres?

94. Egy gúla magassága 15 cm. A gúlát az alaplapjával párhuzamos síkkal egy kisebb gúlára, valamint egy csonkagúlára vágtuk szét. A csonkagúla és az eredeti gúla térfogatának aránya $\frac{117}{125}$.

- a) Milyen magas a kisebb gúla?
- b) Számítsuk ki a kisebb gúla, valamint az eredeti gúla felszínének arányát.

95. Egy szabályos háromszög oldala 12 cm. Az egyik oldallal párhuzamos egyenes a háromszöget két olyan síkidomra bontja, amelyeknek a területe megegyezik. Számítsuk ki a keletkező két síkidom kerületének arányát.

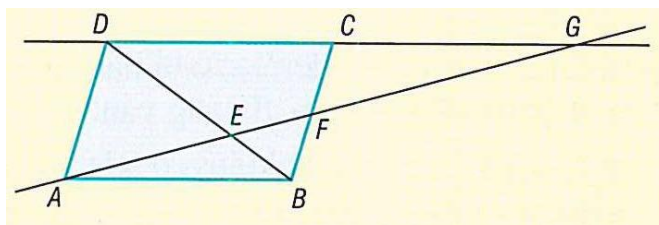
96. Egy gúla alaplapjának területe 30 cm². A gúlát az alaplapjával párhuzamos síkokkal három egyenlő térfogatú részre vágjuk. a) Számítsuk ki, hogy a metszősíkok a gúla csúcsától milyen távolságra találhatók, ha a gúla magassága 18 cm. b) Mekkora területű síkidomokat metszenek ki a síkok a gúlából? Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg!

97. Az $ABCD$ paralelogramma AB alapjának A végpontját összekötjük a CD alap felezőpontjával. Milyen arányban osztja a behúzott szakasz a trapéz BD átlóját?

98. Egy 10 cm sugarú kör egy külső pontján keresztül húzott szelő a kör középpontjától 6 cm távolságra halad. Milyen hosszúságú érintők húzhatók a pontból a körhöz, ha tudjuk, hogy a szelő rövidebb szelőszakasza 4 cm hosszú?

99. Az ABCD paralelogramma A csúcsán át egyenest húzunk, amely a BD átlót E-ben, a BC oldalt F-ben, végül a CD oldal egyenesét G-ben metszi.

- Keressünk az ábrán az AED háromszöghöz hasonló háromszöget.
- Keressünk az ábrán a GDE háromszöghöz hasonló háromszöget.
- Bizonyítsuk be, hogy $AE^2 = EF \cdot EG$.



100. a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy kör valamely P belső pontján át két húrt húzunk, amelyek végpontjai A, B, illetve A', B' akkor $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.

b) Fejezzük ki a $PA \cdot PB$ szorzat értékét a kör r sugara, valamint a P pont és a kör középpontja közötti x távolság segítségével.

Nehezebb feladatok

101. Két, egymást kívülről érintő kör érintési pontján keresztül húzott szelő által kimetszett húrok aránya 13:5.

a) Határozzuk meg a sugarak hosszát, ha a középpontok távolsága 36 cm.

b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is, ha a középpontok távolsága d , és a húrok aránya $a:b$.

102. Hosszabbítsuk meg egy trapéz nem párhuzamos oldalait, míg metszik egymást. Ezen a metszésponton át húzunk a párhuzamos oldalakkal párhuzamos egyenest. Mutassuk meg, hogy ennek az egyenesnek az a két szelete, amely az oldalegyenesek metszéspontja és az átló egyenesek közé esik, egyenlő.

103. Egy trapéz párhuzamos oldalai a és b . A nem párhuzamos oldalakat harmadoljuk. A hosszabbik oldalhoz közelebb eső osztópontokat összekötő egyenesből mekkora szeletet fog közre a két átló?

104. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög külső szögfelezője a szemközti oldalon meghosszabbítását – az oldal végpontjától számítva – a másik két oldal arányában osztja.

105. Ptolemaiosz tétele. Legyenek a, b, c, d egy húrnégyszög oldalai, e és f az átlók. Bizonyítsuk be, hogy az átlók szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével, azaz $ef = ac + bd$.

1016. Osszuk egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre, és a szomszédos oldalak legközelebbi osztópontjait kössük össze egyenessel. Igazoljuk, hogy az a négy egyenes paralelogrammát határoz meg.

107. Egy négyszög átlóinak metszéspontján át két szomszédos oldallal párhuzamos egyenest rajzolunk, és meghatározzuk metszéspontjukat a másik két oldallal. Igazoljuk, hogy ennek a két pontnak összekötő egyenese párhuzamos az egyik átlóval.

108. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a magasságpont a magasságokat két olyan szakaszra bontja, amelyeknek szorzata független a választott magasságtól.

109. Adott két távolság összege és mértani közepe. Szerkesszük meg a távolságokat.

110. Félkörbe másik fél kört rajzolunk, melynek átmérője az elsőnek OA sugara. Az ezen felvett P pontból OA-ra merőlegest állítunk, mely a kisebb félkört K-ban, a nagyobbat L-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AL^2 = 2AK^2$.

111. A h húr F felezőpontján átmenő átmérő két szakasza AF és BF. Igazoljuk, hogy a húrta rajzolt négyzet területe négyszer akkora, mint azé a téglalapé, melynek oldalai AF-fel és BF-fel egyenlők.

112. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két szöge, továbbá a harmadik szög csúcsához tartozó súlyvonala.

113. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alap és a szár különbsége, továbbá a szárak közötti szöge.

114. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, súlypontja és a háromszög köré írt kör középpontja egy egyenesen vannak (ez az úgynevezett Euler-féle egyenes) és a súlypont harmadolja a magasságpont és a köré írt kör középpontja közötti szakaszt.

115. Az ABC háromszög AB oldalának egy belső pontján át párhuzamosokat húzunk az AC, valamint a BC oldalakkal. A két párhuzamos a háromszöget két kisebb háromszögre, valamint egy négyszögre bontja. A keletkező két háromszög területe 4 négyzetcentiméter, illetve 9 négyzetcentiméter. Számítsuk ki az ABC háromszög területét.

116. Az ABC derékszögű háromszögben az AC befogó 60° -os szöget zár be az AB átfogóval. A B ponton át olyan egyenest húzunk, amely a háromszög köré írt kör itt D-ben, az A kezdőpontú AC félegyenest pedig E-ben metszi, továbbá $EC = ED = 6$ cm. a) Bizonyítsuk be, hogy az ABE háromszög szabályos. b) Számítsuk ki az ABC háromszög köré írt körének sugarát.

117. Az ABC hegyesszögű háromszög AB és AC oldalai fölé kifelé fél köröket szerkesztünk. A háromszög AC oldalához tartozó magasságvonal talppontja Q, az AC oldalra rajzolt félkörrel való metszéspontja N. A háromszög AB oldalához tartozó magasság vonal talppontja P, az AB oldalra rajzolt félkörrel való metszéspontja pedig M.

a) Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján.

b) Bizonyítsuk be, hogy $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$.

VIII. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

1. játék

Érme dobása. Dobjunk fel egy érmét hússzor. a) Hányszor kapunk fejet, hányszor írást? b) Mennyi a valószínűsége, hogy fej, mennyi, hogy írás lesz felül?

2. játék

Dobjunk fel egy kockát hússzor. a) Hányszor kapunk 1-est, 2-est, 3-ast, 4-est, 5-öst, 6-ost?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy 1-est, 2-est,..., 6-ost kapunk?

3. játék

Ketten (B és C) játszanak. Egy játék abból áll, hogy feldobnak két kockát egyszer. B nyer, ha az összeg prímszám, C nyer, ha az összeg összetett szám.

a) Játsszunk, és jegyezzük fel, hogy hányszor nyert B, hányszor C.

b) Melyiknek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy B nyer, vagy annak, hogy C?

4. játék

Ketten dobznak egy kockával. Aki nagyobbat dob, az nyer, de C akkor is nyer, ha egyenlőt dobnak, és D dobása érvénytelen, ha egyest dob.

a) Játsszunk ötvenszer, jegyezzük fel az eredményeket, és süssük ki, hogy melyik szerepet érdemes választani: C-t vagy D-t? Miért?

b) Melyiknek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy C nyer, vagy annak, hogy D?

5. játék

Kocka és érme dobása a C vagy a D változat szerint.

C: kocka, érme, kocka sorrendben, D: érme, kocka, érme sorrendben. A hatos és az írás a nyerő.

Akkor nyer a dobó játékos, ha legalább kétszer egymás után nyerőt dobott, különben a társa nyer. A dobó játékosnak melyik szerepet érdemes választani: C-t vagy D-t? Ennek megállapításához játszunk ötven-ötven játékot, jegyezzük fel az eredményeket.

6. játék

Ketten dobznak egy kockával. Egyikük B, másik C.

B nyer, ha vagy egyenlőt dobnak, vagy B prímszámot dobott és dobása nagyobb, mint C-é.

C nyer, ha C nagyobbat dobott, mint B, és B prímet vagy egyest dobott. Egyéb esetekben egyikük sem nyer.

Játsszunk ötven játékot. Melyik szerepet érdemes választani: B-t vagy C-t?

7. játék

Dobjunk fel egy dobókockát. A ad egy pontot B-nek, ha a kockadobás eredménye 1, 2, 3 vagy 4,

B ad egy pontot A-nak, ha a kockadobás eredménye 5 vagy 6.

Az A játékosnak kezdetben 2 pontja van, a B-nek pedig 1. A játék addig folytatódik, amíg valamelyik játékosnak el nem fogy a pontja. Akinek nulla pontja lesz, az veszít.

a) Melyik szerepet érdemes választani: A-t vagy B-t?

b) Mekkora valószínűséggel győz A, illetve B?

c) Mekkora annak az esélye, hogy a játék sosem fejeződik be?

8. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy szabályos játékkockával páros számot dobunk, B azt, hogy háromnál nagyobbat. Mit jelent az $A + B$ esemény?

9. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy játékkockával páratlan számot dobunk, B azt, hogy prímszámot. Mit jelent az $A + B$ esemény?

10. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy játékkockával páratlan számot dobunk, B azt, hogy párosat. Mit jelent az $A + B$ esemény?

11. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy játékkockával páros számot dobunk, B azt, hogy 3-nál nagyobbat. Mit jelent az $A \cdot B$ esemény?

12. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy játékkockával páratlan számot dobunk, B azt, hogy prímszámot. Mit jelent az $A \cdot B$ esemény?

13. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy játékkockával páratlan számot dobunk, B azt, hogy párosat. Mit jelent az $A \cdot B$ esemény?

14. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy játékkockával páros számot dobunk, B azt, hogy háromnál nagyobbat. Mit jelent az $A - B$ esemény, illetve a $B - A$ esemény?

15. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy játékkockával páratlan számot dobunk, B azt, hogy prímszámot. Mit jelent az $A - B$, illetve a $B - A$ esemény?

16. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy játékkockával páratlan számot dobunk, B azt, hogy párosat. Mit jelent az $A - B$, illetve a $B - A$ esemény?

17. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy gyár selejtszázaléka nem magasabb 3%-nál, B azt, hogy a selejtszázalék 2%-nál kisebb. Mit jelent az $A - B$, illetve a $B - A$ esemény?

18. Találomra felírunk egy háromjegyű számot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a felírt szám osztható öttel, B azt, hogy osztható huszonnal, C azt, hogy páros. Mit jelentenek az alábbi események?

$$A + B \quad A + C \quad A + B + C \quad A \cdot B \quad B \cdot C \quad A \cdot B \cdot C$$

19. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzott lap piros, B azt, hogy ász. Mit jelentenek az alábbi események?

$$A + B \quad A \cdot B \quad A - B \quad B - A$$

20. Két szabályos játékkockával egyszerre dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott pontok összege páratlan, B pedig azt, hogy legalább az egyik kockával hatost dobtunk. Határozzuk meg a következő eseményeket!

$$A + B \quad A \cdot B \quad A - B$$

21. Egy szabályos érmének egyik oldalán nulla, a másik oldalán egyes van. Az érmét dobjuk fel egymás után négyszer. Jelölje A, B, C, D rendre a következő eseményeket:

A: a dobott számok összege három
B: legalább kétszer dobtunk egyest
C: legfeljebb kétszer dobtunk egyest
D: pontosan kétszer dobtunk egyest.

Határozzuk meg a következő események valószínűségeit:

$$A + B \quad A \cdot B \quad A + C \quad A \cdot C \quad B + D \\ B \cdot D \quad A + B + C \quad A \cdot B \cdot C$$

22. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek közül válasszunk ki öt számjegyet úgy, hogy a kiválasztásban az ismétlődést is megengedjük. Jelentse A, B, C, D rendre a következő eseményeket:

A: csupa páros számot

B: csupa prímszámot

C: csupa páratlan számot

D: csupa hárommal osztható számot választottunk ki. Mit jelentenek az alábbi események?

$$A + B \quad A + C \quad A + D \quad A \cdot B \quad \bar{A} \quad \bar{A} \cdot C$$

23. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a D, E, Ö, R betűket találomra egymás mellé írva értelmes magyar szót kapunk?

24. Egy dobozba öt cédulát teszünk, amelyekre rendre a következő betűket írtuk: E, E, G, R, S. Húzzuk ki a dobozból egyenként a cédulákat, és a kihúzás sorrendjében helyezzük egymás mellé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az EGRES szót kapjuk?

25. Húzzunk ki egy csomag 32 lapos magyar kártyából találomra egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lap piros?

26. Egy szabályos játékkockát hatszor egymás után feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike előfordul a dobássorozatokban?
27. Két szabályos játékkockát egymástól függetlenül feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét kockával hatost dobunk?
28. Egy szabálytalan játékkockával dobunk. Annak a valószínűsége, hogy páros számot dobunk, $\frac{3}{7}$. Mennyi a valószínűsége annak, hogy páratlan számot dobunk?
29. Írjunk fel találmra csupa páratlan számjegyekből egy ötjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyessel kezdődik?
30. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával találmra felírunk egy ötjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy előfordul benne az ötös számjegy?
31. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből találmra írunk fel egy ötjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így kapott szám
a) tartalmazza az egyest, b) egyesre végződik, c) osztható öttel?
32. Az 52 lapos franciákártyából találmra kihúzzunk tíz lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kör dáma a kihúzott lapok között lesz?
33. Dobjunk fel két szabályos dobókockát, egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két kockával dobott pontok összege legalább kilenc?
34. Írunk fel csupa páratlan számjegyből találmra egy négyjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a) páratlan számot kapunk, b) páros számot kapunk,
c) a felírt szám hármassal kezdődik, d) a felírt szám osztható öttel?
35. Csupa páros számjegyből találmra felírunk egy négyjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a) kettővel, b) négygyel osztható számot kapunk?
36. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottószelvény kitöltése esetén kéttalálatos szelvényünk lesz?
(90 számból húznak ötöt.)
37. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottószelvény kitöltése esetén háromtalálatos szelvényünk lesz?
38. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottószelvény kitöltése esetén négy találatot érünk el?
39. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy lottószelvény kitöltése esetén öt találatot érünk el?
40. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottószelvény kitöltése esetén legalább két találtunk lesz?
41. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottószelvény kitöltése esetén legalább három találatunk lesz?
42. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottószelvény kitöltése esetén legfeljebb három találatunk lesz?
43. Írunk fel találmra egy háromjegyű számot. Mennyi a valószínűsége, hogy minden jegye páratlan lesz?
44. Öt szabályos játékkockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege legfeljebb hét lesz?

45. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzzunk egymás után három lapot úgy, hogy az egyes húzások után a lapokat visszatesszük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a három kihúzott lap hetes lesz?

46. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából húzzunk ki találmra négy lapot! Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzottak közül három lap hetes?

47. Egy szabályos játékkockát feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy páros számot dobunk, B azt, hogy prímszámot. Mennyi a valószínűsége, hogy $A+B$, $A-B$, $B-A$, $A \cdot B$ esemény bekövetkezik?

48. Egy szabályos játékkockával dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott szám háromnál nagyobb, B azt, hogy páratlan. Mennyi a valószínűsége, hogy bekövetkezik

$$A+B \quad A \cdot B \quad \overline{A \cdot B} \quad A-B \quad \overline{A} \cdot B \quad \overline{A} \cdot \overline{B}?$$

49. Egy szabályos játékkockával dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott szám páratlan, B azt, hogy páros. Mennyi a valószínűsége, hogy bekövetkezik

$$A+B \quad A-B \quad B-A \quad A \cdot B \quad \overline{A} \cdot B \quad A \cdot \overline{B}?$$

50. Két szabályos játékkockával egyszerre dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy az összeg páros, B azt, hogy legalább az egyik kockán kettes van. Mennyi a valószínűsége, hogy bekövetkezik

$$A+B \quad A \cdot B \quad A-B?$$

51. Két szabályos játékkockával dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott pontok összege páros, B pedig azt, hogy legalább az egyik kockán egyes van. Mennyi a valószínűsége, hogy bekövetkezik $A \cdot B$, $A+B$, $\overline{A \cdot B}$?

52. Egy szabályos érmének egyik oldalán nulla, a másik oldalán egyes van. Az érmét ötször egymás után feldobjuk. Jelölje A , illetve B a következő eseményeket: A : az első, a harmadik és a negyedik dobás egyes, B : a harmadik, a negyedik és az ötödik dobás egyes. Határozzuk meg az $A+B$ és $A \cdot B$ események valószínűségét.

53. Egy szabályos érmének egyik oldalára nulla, a másik oldalára egyes van írva. Az érmét feldobjuk egymás után négyszer. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott pontok összege négy, B pedig azt, hogy legalább két egyest dobtunk. Határozzuk meg az A , B , $A+B$, $A \cdot B$ események valószínűségét.

54. Egy szabályos érmének egyik oldalán nulla, a másik oldalán egyes van. Az érmét egymás után ötször feldobjuk. Jelölje A , B , C , D rendre a következő eseményeket:

A : a dobott számok összege három

B : legalább háromszor dobtunk egyest

C : legfeljebb háromszor dobtunk egyest

Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

$$A+B, A \cdot B, A+C, A \cdot C, B+C, B \cdot C, A+B+C, A \cdot B \cdot C$$

55. Fehér, fekete és piros színű játékkockát tettünk egy dobozba. Egyet kivesszünk és dobunk vele. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a) fehér kockát húzzunk, b) hatost dobunk, c) fehér hatost dobunk?

56. Bálint és Soma sakkoznak. Annak a valószínűsége, hogy egy játszmát Bálint nyer, $\frac{2}{7}$, annak, hogy

Soma, $\frac{1}{4}$ Mennyi a valószínűsége a döntetlennek?

57. Egy pénzdarabot egymás után ötször feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a) mind az öt alkalommal írást, b) háromszor írást, kétszer fejet, c) négyszer írást, egyszer fejet dobunk?
58. Egy futóverseny nyolcas döntőjébe két angol, egy lengyel, két magyar, egy német és két orosz versenyző került. Mennyi a valószínűsége annak, hogy – ha a versenyzőket egyenlően esélyesnek tekintjük – magyar versenyző kerül az első helyre?
59. Egy kockát négyszer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy különböző számokat dobunk?
60. Egy kockát négyszer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege nyolc?
61. Az 1, 2, 3,..., 10 számokat véletlen módon sorozatba rendezzük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az a) 1, 2, 3 számok, b) 1, 2, 3, 4, 5 számok növekvő sorrendben egymás mellé kerülnek?
62. Egy-egy cédulára írjuk fel rendre a 0, 1, 2 számokat. A cédulákat tegyük egy dobozba. Húzzunk ki egy cédulát és jegyezzük fel a kihúzott számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hatodik húzás után a kihúzott számok összege nyolc, ha minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük?
63. Írjunk fel találmányra csupa páratlan számjegyből egy háromjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- a) tartalmazni fogja a kilences számjegyet
 - b) a hetes számjegy pontosan kétszer szerepel benne
 - c) a felírt számban pontosan három egyes lesz?
64. Egy pénzértéket annyiszor dobunk fel, amíg kétszer egymás után ugyanarra az oldalára esik.
- a) Írjuk le az elemi eseményeket.
 - b) Adjuk meg az egyes elemi események valószínűségét.
 - c) Ellenőrizzük, hogy az elemi események valószínűségének összege 1.
 - d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kísérlet hat dobásból áll?
 - e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kísérlet legfeljebb hat dobásból áll?
 - f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kísérlet páros számú dobásból áll?
65. Egy dobozban 10 cédula van, rendre a 0, 1, 2,..., 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után hat cédulát húzzunk ki visszatétel nélkül. A kihúzott cédulákon levő számjegyeket a kihúzás sorrendjében írjuk egymás mellé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- a) hatjegyű páratlan számot kapunk
 - b) hatjegyű 25-tel osztható számot kapunk?
66. Egy dobozban 10 cédula van, rendre a 0, 1, 2, 3,..., 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után hat cédulát húzzunk ki úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. A kihúzott cédulákon levő számjegyeket a húzás sorrendjében egymás mellé írjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- a) hatjegyű páratlan számot kapunk?
 - b) hatjegyű 25-tel osztható számot kapunk?
67. Egy dobozba 10 cédulát teszünk, amelyeken rendre a következő számjegyek állnak: 0, 1, 2, ..., 9. Húzzunk ki a dobozból egymás után öt cédulát, s ezeket a kihúzás sorrendjében helyezzük egymás mellé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így kapott számötös számjegyei között kettő páros és három páratlan?
68. Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3,..., 15 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát vissza- tétel nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy minden alkalommal az előzőleg kihúzott számnál nagyobb számot húzzunk?

- 69.** Mennyi a valószínűsége, hogy három kockával egyszerre dobva legalább egy egyest dobunk?
- 70.** Két kockával dobunk ötször. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egyszer két hatost dobunk?
- 71.** 100 körte közül 15 hibás. Válogatás nélkül kiveszünk 10 körtét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a) nem lesz köztük hibás, b) lesz köztük legalább egy hibás?
- 72.** Mennyi a valószínűsége annak, hogy három kockával dobva, a dobott pontok összege 12 lesz?
- 73.** Egy kockával ötször dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy négyszer egymás után ugyanazt a számot dobjuk, majd ötödször ettől különbözőt?
- 74.** Nyolc ember – jelölje őket rendre A, B, C, D, E, F, G, H – leül egy padra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy A a pad szélére kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű?
- 75.** Nyolc ember – A, B, C, D, E, F, G, H – leül egy padra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy A és B egymás mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű?
- 76.a)** Nyolc ember – A, B, C, D, E, F, G, H – leül egy padra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy A és B, illetve C és D egymás mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű?
- b) Nyolc ember – A, B, C, D, E, F, G, H – leül egy kerek asztal mellé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy A a B mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű?
- 77.** Nyolc ember – A, B, C, D, E, F, G, H – leül egy kerek asztal mellé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy A a B mellé és C a D mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű?
- 78.** Egy padra leül n ember ($n > 4$). Mennyi a valószínűsége annak, hogy A a B mellé és C a D mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű?
- 79.** Egy csomag 32 lapos magyarkártyából találmra kihúznak tíz lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között legalább egy hetes vagy legalább egy zöld van?
- 80.** 150 csavar közül 10 selejtes. Vegyünk ki a 150 csavar közül öt darabot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a) nem lesz köztük egyetlen selejtes sem
b) egy selejtes és négy hibátlan lesz köztük
c) két selejtes és három hibátlan lesz köztük
d) mind az öt selejtes lesz?
- 81.** 150 csavar közül 15 selejtes. Vegyünk ki a 150 csavar közül találmra tíz darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kivett csavarok között
a) legalább három selejtes lesz
b) legfeljebb három lesz selejtes
c) azok 25%-a lesz selejtes
d) azok 20%-a lesz selejtes
e) azok 10%-a lesz selejtes?
- 82.** Egy ládában 150 alkatrész van, közülük 10 selejtes. Vegyünk ki a ládából találmra tíz alkatrészt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kivett alkatrészek között
a) nem lesz selejtes
b) három lesz selejtes
c) azok 50%-a selejtes
d) mind selejtes lesz?
- 83.** Egy 15 tagú társaság tagjai között egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki. Egy személy több tárgyat is nyerhet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a társaságban levő (egyetlen) Éva

- a) pontosan egy tárgyat, mégpedig a töltőtollat nyeri
- b) a töltőtollat nyeri?

84. Három kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege hétnél kisebb?

85. Egy kockának mind a hat oldallapját befestjük. Ezután vágjuk szét 1000 egybevágó kis kockára. Az így kapott kis kockákat keverjük össze. Vegyünk ki közülük találmra egy kockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a) 0, b) 1, c) 2, d) 3 oldala van befestve?

86. Írjunk fel csupa páratlan számjegyekből találmra egy négyjegyű számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a) tartalmazni fogja az ötös számjegyet, b) az ötös számjegy pontosan kétszer szerepel, c) a felírt számban pontosan három ötös számjegy lesz?

87. Egy szabályos játékkockával 50 dobást végzünk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy tíz esetben dobunk hatost?

88. Egy dobozban 20 fehér és 20 fekete golyó van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobozból találmra kivett tíz golyó között legalább hat fehér és legfeljebb négy fekete golyó lesz?

89. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyikének felhasználásával írunk fel találmra egy ötjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a) kettővel kezdődő, b) ötre végződő, c) kettővel kezdődő és ötre végződő, d) huszonötöllel osztható számot írunk fel?

90. Egy dobozban húsz darab cédula van, amelyekre a következő számokat írtuk: 1, 2, 3, ..., 20. Húzzunk ki közülük találmra ötöt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- a) a 10-es cédula köztük lesz
- b) a tízes és tizenötös számú cédula köztük lesz
- c) mind az öt cédulán egy előre meghatározott szám lesz?

91. Mennyi a valószínűsége annak, hogy öt kockával dobva legfeljebb négy egyenlőt dobunk?

92. Egy csomag 32 lapos magyarkártyából találmra kihúzzunk tíz lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között lesz

- a) mind a nyolc piros
- b) legfeljebb három piros
- c) legalább három piros?

93. Egy osztályból 15 tanuló kirándulni megy két napra. Az éjszakát egy turistaházban töltik, ahol három négyesemélyes és egy háromszemélyes szobát kapnak. a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákban belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe? b) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákban belüli elhelyezkedést is figyelembe vesszük?

94. A minden lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány két-, hány három-, hány négy-, hány ötötalatos szelvény van?

95. 150 darab készülék között öt darab hibás van. Hányféleképpen lehet húsz készüléket úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott készülékek között 0, 1, 4, 5 hibás legyen?

96. Kétszáz csavar közül nyolc selejtes. Hányféleképpen választhatunk ki közülük öt csavart úgy, hogy

- a) ne legyen köztük egyetlen selejtes csavar sem,
- b) egy selejtes és négy hibátlan legyen,
- c) két selejtes és három hibátlan legyen,
- d) mind az öt selejtes legyen?

97. A lottón az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül húznak ki ötöt. Tekintsük az így keletkezett számötösöket. Ezek hány százalékában fordul elő egy rögzített szám?

98. Az egyik dolgozatban három db egyes, négy db kettes, tíz db hármas, öt db négyes, két db ötös született. Mennyi az egyes érdemjegyek relatív gyakorisága?

99. Egy kockát harmincszor feldobunk, és feljegyezzük a dobások eredményét:

1, 5, 6, 3, 5, 2, 4, 1, 2, 5, 5, 3, 2, 6, 4, 2, 5, 4, 2, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 4, 3, 2, 5, 3

Mennyi a háromnál kisebb dobások relatív gyakorisága? Mennyi az ötös dobás relatív gyakorisága?

100. A táblázat az orvosi vizsgán megjelent tanulók magasságának gyakoriságát mutatja. Mennyi egy-egy csoport relatív gyakorisága? Egészítsük ki ezekkel az értékekkel a táblázatot.

magasság (cm)	160-164	165-169	170-174	175-179	180-184	185-190
gyakoriság	4	9	15	17	9	5
relatív gyakoriság						

101. István kölcsönadta Lajosnak a hat kulcsot tartalmazó kulcscsomóját, de nem mondta meg neki, hogy melyik a lift- és melyik a lakáskulcs. Ha Lajos véletlenszerűen próbálkozik, akkor mennyi a valószínűsége, hogy liftet is és utána a lakást is ki tudja nyitni?

102. a) Hányféle sorrendben lehet kijavítani 18 matematika dolgozatot? b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két legjobb dolgozat a végére maradt?

103. A 32 lapos magyar kártya mind a négy színből nyolc lapot tartalmaz. Helga egyszerre négy lapot húzott. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kezében két zöld van?

104. Egy csomagban 15 piros, 7 kék és 8 ezüst színű szaloncukor van. Egyet kihúzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a) pirosat, b) kéket, c) ezüstöt húzunk?

105. Egyszerre dobunk fel három érmét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindegyiknek ugyanaz az oldala kerül felülre?

106. Két teljesen egyforma, külsőre megkülönböztethetetlen kockát feldobunk, a dobott számok összegét tekintjük. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

107. Melyiket vállalnád inkább? a) Kihúzol egy ászt a 32 lapos magyar kártyacsomagból, b) dobsz egymás után két hatost a dobókockával, c) dobsz egymás után 3 írást egy pénzérmével.

108. Egy teszt öt kérdésből áll, mindegyik kérdésnél négy lehetőség közül kell kiválasztani a helyes választ. Ahány helyes választ adsz, annyi lesz az osztályzatod (ha egyet sem találsz el, az is egyes). Sajnos nem készültél, csak véletlenszerűen tudsz válaszolni. a) Mennyi az esélye annak, hogy mégis jelest kapsz? b) Mennyi az esélye annak, hogy nem lesz a dolgozatod elégtelen?

109. Szabályos kockával kétszer dobunk. a) Milyen valószínűséggel lesz 6-os a második dobás?

b) Milyen valószínűséggel lesz 6-os a második, ha az első dobás 2-es?

c) Milyen valószínűséggel lesz 6-os a második, ha az első dobás 6-os?

110. Két szabályos kockával dobunk, egyszerre; az egyik piros, a másik kék.

- a) $p(\text{mindkettő } 6\text{-os}) = ?$ b) $p(\text{legalább az egyik } 6\text{-os}) = ?$ c) $p(\text{nem dobunk } 6\text{-ost}) = ?$
d) $p(\text{a két dobott pontszám összege legalább } 10) = ?$ e) $p(\text{az összeg páros}) = ?$

111. Egy kosárban két piros és két fehér golyó van. Kihúzzunk egy golyót, majd visszatesszük a kosárba, majd egy második golyót választunk. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét választott golyó piros színű?

112. Egy jól megkevert magyarkártyacsomagból ($4 \cdot 8 = 32$ db lapból áll) kiválasztunk négyet.

$A = \{\text{a kihúzott lapok között van piros}\}$, $B = \{\text{kevesebb, mint három pirosat húzzunk}\}$,

$C = \{\text{legalább két pirosat húzzunk}\}$, $D = \{\text{az összes kihúzott lap piros}\}$.

Végezzük el a következő műveleteket! $A + B, AB, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, A + C, B + C, BC, C + D$

113.* Egy sakktáblára véletlenszerűen elhelyezünk két különböző színű bástyát. (64 mezőből választunk kettőt). Mennyi a valószínűsége, hogy ütik egymást?

114. Egy kosárban 12 alma van, közülük 3 belülről kicsit férges. Marcell kettőt véletlenszerűen kiválasztott, hogy elvigye uzsonnára. Mennyi az esélye, hogy kellemes uzsonnában lesz része, ami azt jelenti, hogy mindkét alma teljesen ép?

115. Egy osztályba 15 fiú és néhány lány jár. A két hetest véletlenszerűen kiválasztva, annak a valószínűsége, hogy mindkettő fiú lesz, $\frac{7}{20}$. Hány lány jár az osztályba?

116. A matematikaérettségire előzetesen öt feladatsorozatot készítettek, az egyik tartalmaz egy nehéz valószínűségszámítási feladatot. Ebből az ötből választják ki a két kitűzendő feladatsorozatot. Mennyi az esélye, hogy a nehéz valószínűségszámítási feladatot tartalmazó feladatsorozat is közte lesz a két kitűzött feladatsornak?

117. Egy 32 lapos magyar kártyából egymás után vesszünk ki lapokat, a kihúzott kártyákat nem tesszük vissza. Mi a valószínűsége, hogy a) elsőre pirosat húzzunk, b) csak harmadikra húzzunk pirosat, c) elsőre ászt húzzunk és másodikra zöldet, d) másodikra nem zöldet húzzunk?

118. Egy hét fős baráti társaságban három lány van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha mindannyian véletlenszerűen egymás mellé leülnek, akkor a lányok egymás mellé kerülnek?

119. A pókert 52 lapos francia kártyával játsszák, négyféle szín van benne (pikk ♠, treff ♣, kör ♥, káró ♦), mindegyikben 13-13 lap, lapok a következők: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A). Minden játékos két kártyát kap. Mennyi a valószínűsége, hogy a) mind a kettő ász, b) van közöttük ász, c) van közöttük figurás lap (figurás lapok: J, Q, K, A), d) két egyforma színű van?

120. A klasszikus lottóban 90 golyóból húznak ki ötöt. Ha valaki eltalál legalább kettőt, akkor azt mondjuk, hogy nyer. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottózó a) nyer, b) nem nyer, c) telitalálata van?

121. Van három palánta, amely 0,8, 0,7, 0,6 eséllyel virágzik ki. Mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott palánta kivirágzik?

122.* A koronavírus jelenlétének kimutatására alkalmazott teszt 1000 fertőzöttből 998 esetben mutat pozitív eredményt. Sajnos azonban 100 nem fertőzöttből is 5 esetben pozitív eredményt mutat. Becslések szerint egy nagyváros lakói között legfeljebb egy ezrelék lehet koronavírussal fertőzött. Valakin elvégzik a tesztet és pozitívnak találják. Mekkora az esélye, hogy tényleg fertőzött?

123.* Egy készülék 50 alkatrészt tartalmaz. Az alkatrészek mindegyike esetén 0,3% annak az esélye, hogy az egy éven belül meghibásodik. a) Mekkora a valószínűsége, hogy a készülék a garanciaidőn belül (egy éven belül) meghibásodik? b) Mennyire kell leszorítani az egyes alkatrészek egy éven belüli meghibásodásának esélyét, ha a gyártó cég azt szeretné, hogy a garanciaidőn belül ezer készülékből legfeljebb negyven hibásodjék meg?

124. Egyszerre dobunk két szabályos dobókockával. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott pontok összege 9-nél nagyobb, B azt, hogy az egyik kockán felül hatos van. Határozzuk meg a) az $A+B$, b) az AB esemény valószínűségét.

125. Egy szabályos dobókockát egymás után kétszer feldobunk. a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy másodszorra nagyobb számot dobunk, mint elsőre? b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 10?

126. Mennyi annak az esélye, hogy egy szabályos pénzérmét feldobva először a negyedik dobás lesz írás?

127. Minek nagyobb a valószínűsége? Annak, hogy egy szabályos kockát feldobva az első dobás hatos, vagy annak, hogy az első három nem hatos, de a negyedik hatos.

128.* Kockával dobunk, utána feldobunk egy érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat. Mennyi a valószínűsége, hogy három fejet kapunk?

129. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ötös lottóban (90 számból húznak ötöt) egy adott húzásnál négyet az első tíz szám közül húznak ki?

130. Négy fiút és négy lányt leültetünk egymás mellé. A lányok között van Kati és Juli. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Kati bal oldali szomszédja Juli lesz?

131. Egy-egy cédulára felírtuk külön-külön az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokat és ezt a hét cédulát egy dobozba tettük. Innen véletlenszerűen húzva és balról jobbra egymás mellé téve a cédulákat, mennyi a valószínűsége, hogy a kapott hétjegyű szám 25-tel osztható lesz?

132.a) Annak a valószínűsége, hogy egy méhcsalád túlél egy kemény telet, 0,4. Egy méhészek hat méhcsaládja van. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább két méhcsalád túlél egy kemény telet?

132.b) Egy társaskártyában két szabályos kockával kell dobni. Csak az a játékos kezdheti meg a játékot, akinek sikerül két hatost dobni. a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első körben a résztvevő négy játékos egyike sem léphet játékba? b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első körben mind a négyen játékba léphetnek? c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első körben csak ketten kerülnek játékba?

133. Egy vizsgán a kérdésekre „igen”-nel vagy „nem”-mel kell válaszolni. Egy tanuló „vakon” tippel, azaz 0,5 valószínűséggel felel „igen”-nel, illetve „nem”-mel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a feltett 10 kérdésből a) legalább 5-re; b) legalább 7-re; c) mind a 10-re helyesen válaszol?

134. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából találomra kihúztunk négy lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a piros ász közöttük van?

135. Egy gép csavarokat gyárt. Egy vizsgálat során véletlenszerűen megvizsgáltak 100 csavart, és ebből 8 selejtest találtak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha e 100 csavarból húzat kiválasztunk, akkor nem lesz közöttük selejtes?

Nehezebb feladatok

- 136.** Négy piros, három fehér és két kék golyót találomra egymás mellé helyezünk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két kék golyó egymás mellé kerül?
- 137.** Egy dobozba 10 cédulát teszünk a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekkel. Mindegyik cédulán egy számjegy van. Húzzunk ki a dobozból egymás után öt cédulát, s ezeket a húzás sorrendjében helyezzük egymás mellé. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott számötös számjegyei között kettő páros és három páratlan lesz?
- 138.** Egy nemzetközi táborban 100 résztvevő közül 20 csak franciául és angolul, 25 csak franciául és németül, 25 csak angolul és németül, 20 csak franciául és magyarul és 10 csak magyarul tud. Találomra kiválasztva két táborozót mennyi annak a valószínűsége, hogy tolmács nélkül tudnak egymással beszélgetni?
- 139.** Egy kocka két oldalán 0, két oldalán 1, két oldalán 2 pont van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy hat dobásból összesen öt pontot gyűjtünk?
- 140.** Egy csomag magyarkártyát négy játékos között osztunk szét úgy, hogy mindenki nyolc lapot kapjon. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a négy ász egy játékoshoz kerül?
- 141.** Egy sötét szobában 12 különböző pár cipő van. Találomra kiveszünk 12 darab cipőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük legalább egy összeillő pár?
- 142.** Tizenöt golyót helyezünk el négy dobozban. Mennyi annak a valószínűsége, hogy minden dobozba legalább három golyó kerül?
- 143.** Kilenc dobozba véletlenszerűen elhelyezünk 45 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az n -edik dobozba n golyó kerül? ($n = 1, 2, \dots, 9$)
- 144.** Egy kocka egyik oldalán 1, két oldalán 2, három oldalán 3 van. Dobjuk fel a kockát háromszor. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? (Ez nyolc feladat.)
- 145.** Egy játékos két, látszólag egyforma kockával játszik. Az egyik tényleg szabályos, a másik kicsit egyenetlen súlyeloszlású, ezen a hatos dobás esély egyharmad. A játékos véletlenszerűen választ egy kockát, azt feldobja. a) Mennyi az esélye, hogy hatost dob? b) Ha tudjuk, hogy hatost dobott, akkor mekkora az esélye, hogy a szabálytalan kockával dobott?
- 146.** Egy egységnégyzetben kiválasztunk egy pontot véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy a pont közelebb van a négyzet középpontjához, mint a valamelyik csúcsához?
- 147.** Két sakkozó, A és B hatjátszmás mérkőzést játszik egymással. Annak a valószínűsége, hogy egy partit A győzelmével, döntetlennel vagy B győzelmével végződik, rendre $\frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{13}{28}$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mérkőzés végeredménye 3:3 lesz?
- 148.** A lottószelvényemen ezen a héten a 7, 22, 51, 54, 78 számokat játszottam meg. Éppen a húzást figyelem, és eddig a 78, 13, 22 számokat húzták ki. Ebben a pillanatban mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább hármas találatom lesz?
- 149.** Hány dobókocka esetén a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy azokkal egyszerre dobva pontosan egy hatost dobunk?

150. Egy fiút akkor engednek el játszani, ha három egymás utáni sakkparti közül legalább két egymás utánit megnyer. Partnerei: Apa és Papa, mégpedig vagy Apa-Papa-Apa, vagy Papa-Apa-Papa sorrendben. Apa jobban játszik, mint Papa. Melyik sorrend kedvezőbb a fiú számára? a) Legyen Apa nyerési esélye a fiú ellen $\frac{2}{3}$, míg Papáé csak $\frac{1}{2}$ b) Oldjuk meg a feladatot az általános esetben is.

151. A számegyenes origójába leteszünk egy korongot, majd egy szabályos dobókockát feldobunk nyolcszor. Minden alkalommal, ha összetett számot dobtunk, akkor a korongot eggyel balra mozdítjuk, ha nem összetett számot (prímet vagy 1-et), akkor jobbra. Mekkora valószínűséggel lesz a korong a nyolcadik dobás után ismét az origóban?

152. A Bajnokok Ligájában 2017-ben három spanyol csapat jutott a nyolc közé: az Atlético Madrid, a Barcelona és a Real Madrid. Sorsolással határozták meg a negyeddöntők párosítását (itt már nincs kiemelés, és azonos nemzet csapatai is összekerülhetnek). Mennyi volt a sorsolás előtt a valószínűsége annak, hogy a negyeddöntőben a) Barcelona – Real Madrid párharc lesz? b) lesz spanyol párharc?

153. Mekkora a valószínűsége, hogy az ötös lottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

Tartalomjegyzék

I. NÉGYZETGYÖK	1
II. GEOMETRIA (első rész)	8
III. MÁSODFOKÚ VILÁG	17
IV. KOMBINATORIKA	31
V. VEKTOROK	38
VI. TRIGONOMETRIA	44
VII. GEOMETRIA (második rész)	55
VIII. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS	63